UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA

Facultatea de Matematică şi Informatică
Departamentul Matematici Aplicate

APROBAT
la şedinţa departamentului
din „____” ___________ 2012

Şef departament _________________

CURRICULUM

la disciplina

Calcul Variaţional

Specialităţile *Matematica, Matematica Aplicată*

Ciclul I, Licenţă

AUTOR:

dr. conf.

Titu Capcelea

Chişinău 2012

I. PRELIMINARII

Cursul de „Calcul Variaţional” reprezintă o continuare logică a cursului de metode de optimizare, în care au fost studiate probleme de optimizare definite pe spaţii finit-dimensionale. În cadrul acestui curs se studiază probleme de extrem infinit-dimensionale. Asemenea probleme apar frecvent la modelarea (formalizarea) problemelor reale ce apar în variatele domenii ale activităţii umane: ştiinţă, tehnică, economie etc.

În cadrul disciplinei date se studiază conceptele de bază ce ţin de optimizarea în spaţii funcţionale şi condiţiile de optimalitate corespunzătoare. Se studiază metode analitice exacte de rezolvare a problemelor de calcul variaţional. Se elucidează legătura cu problemele de programare matematică şi metodele numerice de rezolvare.

II. ADMINISTRAREA DISCIPLINEI

Codul disciplinei din planul de studii	Denumirea disciplinei	Responsabil de disciplină	Semestrul	Total ore					Evaluarea	Nr. de credite
				Total	inclusiv					
					C	S	L	LI		
M06A131	Calcul Variaţional	conf.univ. T. Capcelea	VI	60	21	14	---	25	examen	2

C- curs
S- seminarii
L-laborator
LI – lucru individual

UNITĂŢI DE CONŢINUT ŞI REPARTIZAREA ORIENTATIVĂ A ORELOR

Nr. d/o	Unităţi de conţinut	Ore			
		Curs	Seminar	Laborator	Lucrul individual
I.	**Unele probleme practice ce pot fi rezolvate prin metode variaţionale** Problema brahistocronei. Problema lui Dido. Problema lui Kepler. Problema geodezicelor pe o suprafaţă. Problema echilibrului unei membrane elastice deformate. Problema de minimizare a timpului de tranzit al unui râu. Problema lui Chaplygin. Clasificarea problemelor de CV. Problema elementară de CV.	2	2	---	6
II.	**Concepte fundamentale ale Calculului Variaţional (CV)** Extreme globale şi locale ale funcţionalei. Lemele fundamentale ale CV. Diferenţiale de ordinul I şi doi ale funcţionalei. Condiţii necesare de extrem. Problema elementară de CV. Teorema lui Euler. Integrale prime ale ecuaţiei Euler-Lagrange.	7	4	---	7

III.	**Condiţii suficiente de extrem local al funcţionalei** Condiţii suficiente generale de extrem local al funcţionalei. Problema elementară de CV. Ecuaţia Jacobi. Condiţii necesare Jacobi şi Legendre. Condiţii necesare Weierstrass. Condiţii necesare şi suficiente de extrem local în problema elementară de CV.	4	4		4
IV.	**Generalizări ale problemei elementare de CV** Funcţionale ce depind de mai multe funcţii variabile. Sisteme de ecuaţii Euler-Lagrange. Funcţionale ce depind de derivate de ordin superior ale funcţiei necunoscute. Ecuaţia Euler-Poisson. Funcţionale ce depind de derivate de ordin superior ale mai multor funcţii necunoscute. Sisteme de ecuaţii Euler-Poisson.	4	2		4
V.	**Probleme variaţionale de extrem condiţionat.** Problema cu legături olonome. Funcţia Lagrange. Sistemul de ecuaţii Euler-Lagrange. Problema cu restricţii de tip diferenţial (legături neolonome). Condiţii de optimalitate. Problema cu restricţii de tip integral (problema izoperimetrică). Condiţii de optimalitate.	4	2		4
	Total	**21**	**14**	**---**	**25**

III. COMPETENŢE

Competenţe generice:
- Cunoaşterea bazelor teoretice generale ale optimizării în spaţii infinit-dimensionale.
- Posedarea abilităţilor de a studia modele si probleme din domeniul fizicii matematice.
- Aplicarea principiilor variaţionale la elaborarea modelelor matematice pentru procese din diverse domenii ale activităţii umane (tehnică, economie, ştiinţă ş.a.).
- Identificarea problemelor din domeniile de activitate umană care pot fi interpretate şi rezolvate folosind metode de calcul variaţional.
- Comunicarea de idei, probleme şi soluţii atât audienţei specializate, cât şi celei nespecializate.

Competenţe specifice:
- Argumentarea utilizării metodelor variaţionale la rezolvarea problemelor matematice ce formalizează probleme de aplicaţie.
- Deţinerea abilităţilor de analiză şi sinteză în abordarea şi soluţionarea problemelor aplicative ce se modelează matematic cu probleme de calcul variaţional.
- Implementarea metodelor noi şi a concepţiilor matematice moderne în realizarea lucrărilor proprii.

IV. OBIECTIVE GENERALE

La sfârşitul studierii disciplinei studenţii vor fi capabili:

la nivel de cunoaştere şi înţelegere:
- Să descrie obiectul de studiu al disciplinei.
- Să interpreteze problema de extrem al funcţionalei ca model matematic al unei probleme reale de luare a deciziei (de alegere a variantei optime).
- Să definească noţiunea de soluţie optimă a problemei de extrem al funcţionalei (extrem local sau global, extrem local slab sau tare).
- Să clasifice problemele de extrem necondiţionat sau condiţionat conform proprietăţilor componentelor lor.
- Să formuleze condiţii şi criterii de optimalitate pentru diverse clase de probleme de extrem al funcţionalei.
- Să rezolve prin metode analitice exacte probleme de extrem al funcţionalei.

la nivel de aplicare
- Să explice esenţa noţiunilor de bază studiate în cadrul disciplinei.
- Să explice ideile ce stau la baza metodelor clasice (analitice) de rezolvare a problemelor de

extrem al funcţionalei.
- Să precizeze dacă o problemă de calcul variaţional poate fi rezolvată analitic şi să obţină soluţia acesteia prin metodă analitică exactă.
- Să selecteze o metodă adecvată de rezolvare a unei probleme de extrem local sau global al funcţionalei şi să argumenteze oportunitatea selectării metodei.

la nivel de integrare

- Să adapteze, perfecţioneze şi să dezvolte cunoştinţele şi abilităţile dobândite în cadrul disciplinei date.
- Să cerceteze probleme de extrem al funcţionalei ce nu sunt studiate în cadrul cursului, să definească pentru ele noţiunile de soluţie optimă, să stabilească criterii de optimalitate şi să demonstreze justeţea lor.
- Să realizeze pe calculator metodele studiate în cadrul cursului, utilizând sisteme de calcul simbolic.

V. OBIECTIVE DE REFERINŢĂ ŞI UNITĂŢI DE CONŢINUT

Subiectul 1. Unele probleme practice ce pot fi rezolvate prin metode variaţionale	
Obiective	**Unităţi de conţinut**
- Să formuleze probleme de calcul variaţional şi să le identifice tipul în dependenţă de conţinutul acestora. - Să cunoască şi să aplice practic etapele modelării matematice a problemelor de aplicaţie. - Să identifice probleme de aplicaţie din diverse domenii ale activităţii umane ce pot fi modelate matematic prin probleme variaţionale. - Să genereze modele matematice variaţionale pentru diverse probleme de aplicaţie. - Să formuleze problema elementară de CV (PECV).	- Problema brahistocronei. Problema lui Dido. Problema lui Kepler. Problema geodezicelor pe o suprafaţă. Problema echilibrului unei membrane elastice deformate. Problema de minimizare a timpului de tranzit al unui râu. Problema lui Chaplygin. - Clasificarea problemelor de CV. Problema elementară de CV.
Subiectul 2. Concepte fundamentale ale Calculului Variaţional (CV)	
Obiective	**Unităţi de conţinut**
- Să definească funcţionale de tip integrală şi să verifice continuitatea acestora în sensul normei spaţiului normat pe care sunt definite. - Să definească adecvat noţiunile de extrem global şi extrem local, extrem local tare şi extrem local slab al funcţionalei şi să le aplice la verificarea optimalităţii unei funcţii date într-o problemă concretă de calcul variaţional. - Să formuleze şi să demonstreze lemele fundamentale ale CV. - Să definească corect noţiunile de diferenţială Gâteaux şi diferenţială Fréchet a funcţionalei (de ordinul I şi II), să cunoască şi să aplice proprietăţile acestora. - Să formuleze şi să argumenteze condiţii suficiente de liniaritate şi continuitate a G-diferenţialei. - Să identifice legătura dintre G-diferenţială şi F-diferenţială. - Să cunoască exemple ce confirmă că liniaritatea şi continuitatea G-diferenţialei nu sunt suficiente pentru ca funcţionala să fie F-diferenţiabilă.	- Extreme globale şi locale ale funcţionalei. - Lemele fundamentale ale CV: lema Lagrange; lema du Bois-Reymond. - Diferenţiale de ordinul I şi II ale funcţionalei. - Condiţii necesare de extrem al funcţionalei: condiţii de ordinul I (teorema Fermat) şi condiţii de ordinul II. - Problema elementară de CV. Teorema lui Euler. - Integrale prime ale ecuaţiei Euler-Lagrange.

- Să elaboreze şi să aplice în practică un algoritm de stabilire a F-diferenţiabilităţii funcţionalei într-un punct al mulţimii funcţiilor admisibile. - Să formuleze şi să demonstreze condiţii necesare de ordinul I şi II de extrem al funcţionalei. - Să aplice condiţii necesare de extrem al funcţionalei la determinarea mulţimii de extremale ale funcţionalei. - Să cunoască şi să utilizeze rezultate privind existenţa şi unicitatea punctelor de extrem al funcţionalei. - Să formuleze şi să demonstreze teorema lui Euler ce dă condiţii necesare de ordinul I de extrem în PECV. - Să utilizeze ecuaţia Euler-Lagrange (EEL) pentru a determina extremalele în probleme concrete de calcul variaţional. - Să identifice şi să utilizeze în uzul practic cazurile particulare în care EEL admite diminuare a ordinului.	
Subiectul 3. Condiţii suficiente de extrem local al funcţionalei	
Obiective	**Unităţi de conţinut**
- Să definească corect noţiunile de funcţională pătratică pozitiv (negativ) definită, funcţională tare pozitiv (negativ) definită. - Să formuleze şi să demonstreze teorema ce dă condiţii suficiente generale de extrem local al funcţionalei. - Să cunoască condiţiile necesare Legendre, Jacobi şi Weierstrass de extrem în PECV şi să le aplice la rezolvarea problemelor de aflare a extremalelor funcţionalelor. - Să identifice exemple ce confirmă faptul că condiţiile Legendre, Jacobi şi Weierstrass nu sunt condiţii suficiente de extrem local al funcţionalei. - Să definească noţiunile de puncte conjugate (interpretarea algebrică şi geometrică) ale extremalei funcţionalei şi câmp central de extremale ale funcţionalei. - Să formuleze şi să aplice la determinarea extremelor locale condiţii necesare şi suficiente de extrem local slab sau tare în PECV.	- Condiţii suficiente generale de extrem local al funcţionalei. - Problema elementară de CV. Ecuaţia Jacobi. - Condiţii necesare Jacobi şi Legendre. - Condiţii necesare Weierstrass. - Condiţii necesare şi suficiente de extrem local în problema elementară de CV.
Subiectul 4. Generalizări ale problemei elementare de CV	
Obiective	**Unităţi de conţinut**
- Să formuleze probleme variaţionale ce reprezintă generalizări ale PECV. - Să identifice sistemul de ecuaţii Euler-Poisson (EEP) ca fiind condiţii necesare de ordinul I de extrem al funcţionalei în problemele variaţionale cu funcţionale ce depind de mai multe funcţii variabile şi de derivate de ordin superior ale acestora. - Să aplice algoritmi de aflare a extremalelor admisibile ale funcţionalei în probleme cu funcţionale ce depind de mai multe funcţii variabile sau/şi funcţionale ce conţin derivate de	- Funcţionale ce depind de mai multe funcţii variabile. Sisteme de ecuaţii Euler-Lagrange. - Funcţionale ce depind de derivate de ordin superior ale funcţiei necunoscute. Ecuaţia Euler-Poisson. - Funcţionale ce depind de derivate de ordin superior ale mai multor funcţii necunoscute. Sisteme de ecuaţii Euler-Poisson.

ordin superior ale funcţiei necunoscute. - Să aplice lemele fundamentale ale CV la deducerea sistemelor de EEL sau EEP.	
Subiectul 5. Probleme variaţionale de extrem condiţionat	
Obiective	**Unităţi de conţinut**
- Să formuleze probleme variaţionale de extrem condiţionat şi să le reducă la probleme de extrem necondiţionat folosind metoda factorilor lui Lagrange. - Să identifice condiţii necesare de extrem în problema variaţională de extrem condiţionat. - Să aplice algoritmul de aflare a extremalelor admisibile ale funcţionalei în problemele concrete cu legături olonome, cu restricţii de tip diferenţial, cu restricţii de tip integral.	- Problema cu legături olonome. Funcţia Lagrange. Sistemul de ecuaţii Euler-Lagrange. - Problema cu restricţii de tip diferenţial (legături neolonome). Condiţii necesare de extrem. - Problema cu restricţii de tip integral (problema izoperimetrică). Condiţii necesare de extrem.

VI. LUCRUL INDIVIDUAL

Produsul preconizat	*Strategii de realizare*	*Criterii de evaluare*	*Termen de realizare*
Lucrări independente la subiectele 1, 2	▪ Proiectarea etapelor ▪ Studiu bibliografic ▪ Investigaţii proprii ▪ Prezentarea rezultatelor	▪ Corectitudine ▪ Exhaustivitate ▪ Control frontal şi convorbiri ▪ Relevanţa concluziilor	Către prima atestare
Lucrări independente la subiectele 3, 4 şi 5	▪ Proiectarea etapelor ▪ Studiu bibliografic ▪ Investigaţii proprii ▪ Prezentarea rezultatelor	▪ Corectitudine ▪ Exhaustivitate ▪ Control frontal şi convorbiri ▪ Relevanţa concluziilor	Către atestarea a doua

VII. BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

1. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. - М.: Физматгиз, 1961. - 228с.
2. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. 3-е изд. - М.: Изд-во МГТУ, 2006. - 488с.
3. Ахиезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению. - М.: Гостехтеоретиздат, 1955. - 248с.
4. Будылин А.М. Вариационное исчисление - Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 2001. - 197с.
5. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Основы вариационного исчисления, т.I, ч.I-II - М.-Л.: ОНТИ, 1983.
6. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления, 2-е изд. - М. – С.П., 2001. - 344 с.
7. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. 2-е изд. - М.: Наука, 1970. 192с.
8. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. - М.: Наука, 1969. - 424 с.
9. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. - М.: Мир, 1974. - 488с.
10. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселёв А.И. Вариационное исчисление (Задачи и упражнения). - М.: Наука, 1973. - 192с.
11. Пантелеев А.В. Вариационное исчисление в примерах и задачах. - М.: Изд. МАИ, 2000. - 228с.
12. Васильева А.Б., Медведев Г.Н., Тихонов Н.А., Уразгильдина Т.А. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах. - М.: Физматлит, 2003. - 432с.

13. Романко В.К., Агаханов Н.Х., Власов В.В.. Коваленко Л.И. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению - М.: Физматлит, 2002. - 256с.
14. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи. 2-е изд. - М.: Физматлит, 2005. - 256с.
15. Lavrentiev M.A. Curs de calcul variaţional. - Bucureşti: Editura Tehnică, 1955.
16. Амосов А.А., Игнатьева Н.У., Перескоков А.В. Задачи по вариационному исчислению. - М.: Изд-во МЭИ, 2007. – 64с.
17. B. Dacorogna. Introduction to the calculus of variations. - London: Imperial College Press, 2004.- 228p.
18. Bruce van Brunt. The calculus of the variations (Universitext). - Berlin: Springer-Verlag, 2004. - 290p.
19. Weinstock Robert. Calculus of Variations, with Applications to Physics and Engineering. - New York: Dover, 1974. - 326 p.