Test de evaluare la disciplina Calcul Variațional

1. Utilizând definiția, să se demonstreze că funcția $y^*(x) = e^x$ realizează un minim local slab al funcționalei

$$I[y(x)] = \int_0^1 \left(y(x) - y'(x)\right)^2 \left(y'(x) - e^x + 1\right) dx,\ y \in D := \left\{ y \in C^1[0;1] \middle| y(0) = 1,\ y(1) = e \right\}.$$ **1.5p.**

2. Să se afle diferențiala Gâteaux de ordinul I a funcționalei

$$I[y(x)] = \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + y^2(x)}\, dx,\ y \in D := \left\{ y \in C^1[0;1] \middle| y(0) = 0,\ y(1) = 1 \right\}.$$ **1.5p.**

3. Să se afle extremalele admisibile ale funcționalei

a) $$I[y(x)] = \int_0^{\pi/4} \left(4y^2(x) - y'^2(x) + 8y(x)e^x\right) dx,\ y \in D := \left\{ y \in C^1[0;\pi/4] \middle| y(0) = -1,\ y(\pi/4) = 0 \right\};$$ **1.5p.**

b) $$I[y(x)] = \int_0^{\pi/4} \left(y''^2(x) - 16y^2(x) + xe^{-x}\right) dx,\ y \in D := \left\{ y \in C^2[0;\pi/4] \middle| y(0) = 1,\ y(\pi/4) = 0,\ y'(0) = 0,\ y'(\pi/4) = -2 \right\};$$ **1.5p.**

c) $$I[y(x)] = \int_2^7 \left(\cos x + 3x^2 y(x) + \left(x^3 - y^2(x)\right) y'(x)\right) dx,\ y \in D := \left\{ y \in C^1[2;7] \middle| y(2) = 3,\ y(7) = 0 \right\}.$$ **1.5p.**

d) $$I[y(x)] = \int_0^1 \left(x^2 y_2'(x) + y_1'^2(x)\right) dx,\ y \in D := \left\{ y \in C^1\left([0;1], \mathbb{R}^2\right) \middle| y_1(0) = y_2(0) = 0,\ y_1(1) = -0.5,\ y_2(1) = 1,\ y_1' + y_2 = 0 \right\}.$$ **1.5p.**

1 punct din oficiu ;

(1). $I[y(x)] = \int_0^1 (y(x)-y'(x))^2 \cdot (y'(x) - e^x + 1)\,dx$, $y \in \mathcal{D} := \{y \in C^1[0;1] \mid y(0)=1, y(1)=e\}$

$y^*(x) = e^x$ - realizează minim local slab

Demonstrație: $y^*(x) = e^x \in \mathcal{D}$ - simplu se verifică.

Conform def. p. de minim local slab e necesar să se arate că $\exists \varepsilon > 0$ a.î. ptu $\forall y \in \mathcal{D} \cap V_1(y^*;\varepsilon)$ avem $I[y^*] \le I[y]$.

Aici $V_1(y^*;\varepsilon) := \{y \in C^1[0;1] \mid \|y-y^*\|_{C^1[0;1]} \le \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ oricât de mic.

Se verifică simplu că $I[y^*] = 0$. Prin urmare, problema formulată se reduce la a indica un $\varepsilon > 0$ a.î. $I[y] \ge 0$, $\forall y \in \mathcal{D} \cap V_1(y^*;\varepsilon)$.

Fie $\varepsilon = 1$. Atunci ptu $\forall y \in \mathcal{D} \cap V_1(y^*;1)$ avem:

$$\|y-y^*\|_{C^1[0;1]} \le 1 \Rightarrow \max_{x\in[0;1]} |y(x) - e^x| + \max_{x\in[0;1]} |y'(x) - e^x| \le 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max_{x\in[0;1]} |y(x)-e^x| \le 1$$

$$\max_{x\in[0;1]} |y'(x) - e^x| \le 1 \Rightarrow |y'(x)-e^x| \le 1, \forall x \in [0;1] \Rightarrow -1 \le y'(x) - e^x \le 1, \forall x \in [0;1]$$

În particular, $-1 \le y'(x) - e^x, \forall x \in [0;1] \Rightarrow$

$\Rightarrow y'(x) - e^x + 1 \ge 0, \forall x \in [0;1]$. $(*)$

D/ce $(y(x) - y'(x))^2 \ge 0, \forall x \in [0;1] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ conform $(*)$ că: $(y(x)-y'(x))^2 \cdot (y'(x) - e^x + 1) \ge 0, \forall x \in [0;1]$

$$\Rightarrow \int_0^1 (y(x)-y'(x))^2 \cdot (y'(x) - e^x + 1)\,dx \ge 0 \Rightarrow I[y(x)] \ge 0, \forall y \in \mathcal{D} \cap V_1(y^*;\varepsilon).$$

c.t.d.

---

(2). $I[y(x)] = \int_0^1 x^2 \cdot \sqrt{1+y^2(x)}\,dx$, $y \in \mathcal{D} := \{y \in C^1[0;1] \mid y(0)=0, y(1)=1\}$

Se cere: $\delta I[y^*;\delta y]$ – diferențiala Gâteaux de ordinul I.

Conform definiției diferențialei Gâteaux în sensul derivatei în raport cu parametrul avem:

$$\delta I[y^*;\delta y] := \varphi'(\alpha)\big|_{\alpha=0}, \text{ unde}$$

$\varphi(\alpha) := I[y^* + \alpha \delta y]$, $y^* \in \mathcal{D}$, $\underbrace{\delta y}_{\text{fixat}} \in C^1[0;1]: \delta y(0) = \delta y(1) = 0$.

$H_1 := \{\delta y \in C^1[0;1] \mid \delta y(0) = \delta y(1) = 0\}$

Avem $\varphi(\alpha) = \int_0^1 x^2 \cdot \sqrt{1+(y^*+\alpha\delta y)^2}\,dx$;

~~D/ce integrala nu depinde~~ D/ce doar integrandul depinde de α avem:

$$\varphi'(\alpha) = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{(y^* + \alpha\delta y)\cdot \delta y}{\sqrt{1+(y^*+\alpha\delta y)^2}}\,dx;$$

$$\delta I[y^*;\delta y] = \varphi'(\alpha)\big|_{\alpha=0} = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{y^*(x)\delta y(x)}{\sqrt{1+y^{*2}(x)}}\,dx$$ – G-diferențiala de ord. I în p. $y^* \in \mathcal{D}$ pe direcția $\delta y \in H_1$.

(3.)

a) $I[y(x)] = \int_0^{\pi/4} \left(4y^2(x) - y'^2(x) + 8y(x)e^x\right)dx$, $y \in \mathcal{D} := \{y \in C^1[0;\pi/4] \mid y(0) = -1, y(\pi/4) = 0\}$

Dacă integrandul $F = 4y^2 - y'^2 + 8ye^x$ depinde de o singură funcție necunoscută $y(x)$ de argument ~~scalar~~ x și sunt fixate extremitățile curbei căutate $y \in C^1[0;\pi/4]$, problema examinată este una elementară de calcul variațional.

Familia de extremale (puncte staționare) ale funcționalei $I[y(x)]$ se determină ca soluție a ecuației Euler–Lagrange (EEL):

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0 \quad ; \quad F_y = 8y + 8e^x;\ F_{y'} = -2y';\ \frac{d}{dx}(F_{y'}) = -2y'';$$

$$\Updownarrow$$

$$8y + 8e^x + 2y'' = 0 \Leftrightarrow y'' + 4y = -4e^x \text{ — EDLN cu coef. constanți}$$

$\Rightarrow$ soluția generală a acesteia se determină ca suma soluției generale a ecuației omogene asociate și a unei soluții particulare a ecuației neomogene:

$$y_{SGEN}(x) = y_{SGEO}(x) + y_{SPEN}(x).$$

Să aflăm soluția generală a ecuației omogene asociate $y'' + 4y = 0$.

Ec. caract.: $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i$

$\Rightarrow y_{SGEO}(x) = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

Să aflăm soluția particulară a ec. neomogene prin metoda selecției:

Membrul drept al EDLN este de forma $(-4e^x)$.

Conform metodei selecției membrul drept trebuie să fie de forma:

$$f(x) = e^{\alpha x}\cdot(P_m(x)\cos(\beta x) + Q_n(x)\cdot\sin(\beta x)).$$

În cazul dat avem: $\alpha = 1$; $\beta = 0$. Ne interesează d/c numerele $\alpha \pm i\beta = 1$ sunt rădăcini ale ec. caract. $\Rightarrow$ R-s: nu.

At. sol. part. a ec. neom. se caută de forma:

$P_r(x)\cdot e^{\alpha x}$, unde r - coincide cu gradul polinomului de pe lângă $e^{\alpha x}$ în membrul drept $f(x)$.

În cazul dat avem $f(x) = -4e^x \Rightarrow P_r(x) = \text{const}$ (polinom de grad zero).

At. sol. part. se caută de forma: $y_{SPEN}(x) = Ae^x$.

Avem: $y'_{SPEN}(x) = Ae^x$; $y''_{SPEN}(x) = Ae^x$. Se substituie în EDLN:

$$Ae^x + 4Ae^x = -4e^x \Rightarrow 5A = -4 \Rightarrow A = -\frac{4}{5} \Rightarrow y_{SPEN}(x) = -\frac{4}{5}e^x$$

$\Rightarrow y_{SGEN}(x) = y_{SGEO}(x) + y_{SPEN}(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{4}{5}e^x$ – familia de extremale ale f-lei $I[y(x)]$.

Extremalele admisibile ale f-lei $I[y(x)]$ se vor determina aflând coef. C_1 și C_2 p/u care $y_{SGEN}(x)$ satisface condițiile la extremități:

$$\begin{cases} y_{SGEN}(0) = -1 \\ y_{SGEN}(\pi/4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 - \frac{4}{5} = -1 \\ C_2 - \frac{4}{5}e^{\pi/4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{5} \\ C_2 = \frac{4}{5}e^{\pi/4} \end{cases} \Rightarrow y^*(x) = -\frac{1}{5}\cos 2x + \frac{4}{5}e^{\pi/4}\sin 2x - \frac{4}{5}e^x$$

reprezintă unica extremală admisibilă a f-lei $I[y(x)]$ pe mulțimea funcțiilor admisibile $\mathcal{D}$.

③ b) $I[y(x)] = \int_0^{\pi/4} (y''^2(x) - 16y^2(x) + xe^{-x})dx$, $y \in \mathcal{D} := \{y \in C^2[0, \pi/4] \mid y(0) = 1, y(\pi/4) = 0,$
$y'(0) = 0, y'(\pi/4) = -2\}$

Întrucât integrandul $F = y''^2 - 16y^2 + xe^{-x}$ depinde de derivate de ord. II ale funcției necunoscute (nu doar de derivate de ord. I), problema reprezintă o generalizare a PECV.

Familia de extremale ale f-lei $I[y(x)]$ se determină în cazul dat ca soluție a ecuației Euler – Poisson (EEP):

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) + \frac{d^2}{dx^2}(F_{y''}) = 0$$

Avem: $F_y = -32y$; $F_{y'} = 0$; $F_{y''} = 2y''$; $\frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0$; $\frac{d^2}{dx^2}(F_{y''}) = 2y^{(IV)}$;

EEP: $-32y + 2y^{(IV)} = 0 \Rightarrow y^{(IV)} - 16y = 0$ – EDLO cu coef. constanți.

Ec. caracteristică asociată este: $\lambda^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 4) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2$; $\lambda_{3,4} = \pm 2i$ $\Rightarrow y_{SGEO}(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x$

$(c_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1,4})$

$y'_{SGEO}(x) = 2c_1e^{2x} - 2c_2e^{-2x} - 2c_3\sin 2x + 2c_4\cos 2x$; familia de extremale ale f-lei $I[y(x)]$

Extremalele admisibile vor satisface cond. la extremități:

$$\begin{cases} y_{SGEO}(0) = 1 \\ y_{SGEO}(\pi/4) = 0 \\ y'_{SGEO}(0) = 0 \\ y'_{SGEO}(\pi/4) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_1e^{\pi/2} + c_2e^{-\pi/2} + c_4 = 0 \\ 2c_1 - 2c_2 + 2c_4 = 0 \\ \cancel{2}c_1e^{\pi/2} - \cancel{2}c_2e^{-\pi/2} - \cancel{2}c_3 = -\cancel{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 1 \\ c_4 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow y^*(x) = \cos 2x$ – unica extremală admisibilă.

③ c) $I[y(x)] = \int_2^7 \left(\cos x + 3x^2 y(x) + (x^3 - y^2(x))y'(x)\right)dx,\ y \in \mathcal{D} := \{y \in C^1[2;7] \mid y(2)=3,\ y(7)=0\}$.

D/ce integrandul $F = \cos x + 3x^2 y + (x^3 - y^2)\cdot y'$ în această PECV depinde liniar de y', ecuația Euler–Lagrange este de forma:

$$P_y(x, y(x)) - Q_x(x, y(x)) = 0, \text{ unde}$$

$$P = \cos x + 3x^2 y\ ;\ Q = x^3 - y^2\ ;$$

EEL: $3x^2 - 3x^2 = 0 \models 0 \equiv 0,\ \forall\ (x, y(x))$, se satisface identic EEL.

În acest caz integrandul F se exprimă ca diferențială totală a unei funcții $M(x, y(x))$ iar integrala nu depinde de curba de integrare. Într-adevăr:

$$\int_2^7 (\cos x + 3x^2 y + (x^3 - y^2)\cdot y')dx = \int_2^7 \left((\cos x + 3x^2 y)dx + (x^3 - y^2)dy\right) =$$

$$= \int_{(2;3)}^{(7;0)} d\left(x^3 y + \sin x - \frac{y^3}{3}\right) = \left(x^3 y(x) + \sin x - \frac{y^3(x)}{3}\right)\Bigg|_{x=2}^{x=7} =$$

$$= (7^3 \cdot 0 + \sin 7 - 0) - \left(8\cdot 3 + \sin 2 - \frac{27}{3}\right) = \text{const},\ \forall y \in \mathcal{D}.$$

$\models$ Problema variațională își pierde sensul.

3d) $I[y(x)] = \int_0^1 (x^2 y_2'(x) + y_1'^2(x))dx,\ y \in \mathcal{D} := \{y \in C^1([0;1];\mathbb{R}^2) \mid y_1(0) = y_2(0) = 0,\ y_1(1) = -1/2,\ y_2(1) = 1,\ y_1' + y_2 = 0\}$.

Problemă variațională de extrem condiționat cu o restricție de tip diferențial. Extremalele admisibile în această problemă se vor găsi printre extremalele admisibile ale problemei de extrem necondiționat:

$$I[y] = \int_0^1 F^*(x, y, y')dx,\ y \in \mathcal{D}_1 := \{y \in C^1([0;1];\mathbb{R}^2) \mid y_1(0) = y_2(0) = 0,\ y_1(1) = -1/2,\ y_2(1) = 1\}, \text{ unde}$$

$$F^* = F + \lambda_1(x)\cdot(y_1' + y_2) = x^2 y_2' + y_1'^2 + \lambda_1(x)\cdot(y_1' + y_2)\ ;$$

$$\begin{cases} F^*_{y_1} - \frac{d}{dx}(F^*_{y_1'}) = 0 \\ F^*_{y_2} - \frac{d}{dx}(F^*_{y_2'}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{d}{dx}(2y_1' + \lambda_1(x)) = 0 \Rightarrow 2y_1'' + \lambda_1' = 0 \\ \lambda_1(x) - \frac{d}{dx}(x^2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2x \Rightarrow \lambda_1' = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2y_1'' + 2 = 0 \Rightarrow y_1'' = -1 \Rightarrow y_1'(x) = -x + C_1 \Rightarrow y_1(x) = -\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Restricția $y_1' + y_2 = 0 \models y_2 = -y_1' = x - C_1$;

$$\begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \\ y_1(1) = -1/2 \\ y_2(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ -C_1 = 0 \\ -1/2 = -1/2 \\ 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \models \begin{aligned} y_1(x) &= -x^2/2 \\ y_2(x) &= x \end{aligned}$$

$\models$ o unică extremală admisibilă:

$$y^*(x) = (y_1^*(x), y_2^*(x)) = \left(-\frac{x^2}{2}; x\right)^T.$$