1.1 Formularea unor probleme clasice de calcul variațional

Mai întâi se vor examina unele probleme clasice ale calculului variațional, după care, pornind de la ideile sugerate de acestea, vom defini noțiunile de bază ale disciplinei.

1.1.1. Problema lui Dido [12, p.11]

Din punct de vedere istoric este prima problemă de calcul variațional. Este cunoscută datorită unei legende redate de poetul latin Vergilius în epopeea în versuri *Aeneis* ("Eneida"). Legenda întemeierii oraşului antic Cartagina ne relatează cum că prințesa feniciană Elisa (cunoscută la romani sub numele de Dido), sora regelui Pygmalion al oraşului Tyr, ca urmare a unor conflicte cu aristocrații a fost nevoită să părăsească oraşul, retrăgându-se din calea fratelui său însetat de putere, a traversat Marea Mediterană şi a acostat în regiunea țărmului nord-african. Căpetenia tribului băştinaş i-a făgăduit atât pământ cât va putea să cuprindă cu o piele de vițel. Dido a tăiat pielea în fâşii înguste, le-a legat cap la cap, iar cu firul (funia) obținut a putut marca un teritoriu destul de vast lângă țărm. Pe teritoriul marcat a apărut cetățuia Byrsa, în jurul căreia s-a dezvoltat mai târziu oraşul Cartagina.

Conținutul matematic al legendei poate fi formulat astfel: cum trebuie de amplasat firul în raport cu țărmul mării pentru ca el să delimiteze un lot de pământ cu o suprafață maxim admisibilă, adică problema constă în a determina curba din plan de lungime fixă l (l - lungimea funiei), care mărgineşte o figură de arie maximă.

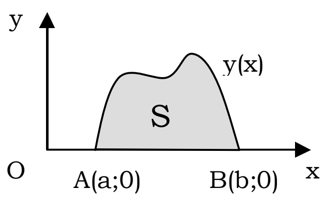


fig. 1

Să presupunem că pe porțiunea analizată țărmul mării are forma unei drepte şi considerăm sistemul de coordonate cartezian xOy astfel încât axa Ox să reprezinte țărmul mării. Fie punctele $A(a;0), B(b;0)$ reprezintă capetele firului, iar poziția firului este descrisă de graficul funcției netede $y = y(x), x \in [a;b]$ (a se vedea fig. 1). Întrucât capetele $x = a$ şi $x = b$ ale firului sunt fixate, avem

$$y(a) = y(b) = 0 . \qquad (1.1.1)$$

Lungimea l a firului se calculează conform formulei (a se vedea, de exemplu, [16, p. 379]):

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx\,, \tag{1.1.2}$$

iar aria lotului limitat de fir conform formulei:

$$S[y(x)] = \int_a^b y(x)dx\,. \tag{1.1.3}$$

Problema se reduce la determinarea funcției netede $y = y(x)$, care satisface condițiile (1.1.1), (1.1.2) şi-i asigură integralei (1.1.3) valoarea maximă.

Din motive evidente problema lui Dido se numeşte problemă izoperimetrică. Forma căutată a firului este cea a unui arc de cerc, afirmație ce va fi argumentată mai târziu.

1.1.2. Problema brahistocronei (curba celei mai rapide descendenţe sub acţiunea forţei gravitaţionale)

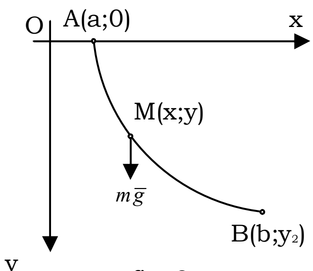


fig. 2

Cu toate că probleme de calcul variațional (vom scrie în continuare prescurtat CV) au fost formulate şi rezolvate încă în antichitate, drept moment al apariției CV ca disciplină matematică se consideră anul 1696 când în revista „Acta Eruditorum" a apărut scrisoarea lui Johann Bernoulli în care acesta formula renumita problemă a brahistocronei. Originea termenului brahistocronă se află în limba greacă (brakhistos = cel mai scurt, khronos = timp). Un punct material M porneşte din punctul A fără viteză inițială şi se mişcă fără frecare, sub acțiunea forței de gravitație, pe arcul de curbă $\overset{\frown}{AB}$ (a se vedea fig. 2) cuprinsă într-un plan vertical (A şi B nu stau pe aceeaşi verticală). Problema brahistocronei constă în următoarele: dintre toate curbele netede, aflate într-un plan vertical, care unesc punctele fixe A şi B, cu B mai jos decât A, să se determine acea curbă pe care punctul M ajunge din A în B în timpul cel mai scurt.

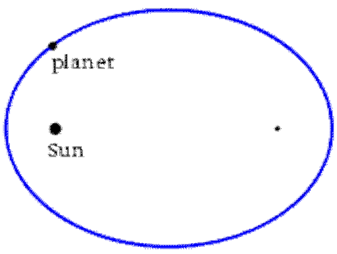
Pentru rezolvare, vom orienta axa Oy pe verticală în jos ca în fig. 2. Fie $y = y(x)$ $(x \in [a;b])$ ecuația curbei netede căutate, $y(a) = 0,\ y(b) = y_2,\ b > 0,\ y_2 > 0,\ a \geq 0$, iar $v = v(x)$ - mărimea vitezei de deplasare a punctului material M în fiecare punct $(x; y(x))$ al arcului $\overset{\frown}{AB}$. În momentul în care ordonata poziției punctului material va fi egală cu y, punctul material va pierde mgy unități (m - masa punctului, g - accelerația căderii libere) de energie potențială. Însă către acest moment va creşte energia cinetică cu $mv^2/2$ unități. În virtutea legii conservării energiei (amintim că frecarea lipseşte) avem $\frac{mv^2}{2} - mgy = 0$, de unde $v = \sqrt{2gy} = \frac{ds}{dt}$, unde ds este lungimea arcului $\overset{\frown}{AM}$. Atunci $dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$. Prin urmare, dacă $T[y]$ este timpul necesar pentru ca punctul material să ajungă din A în B pe arcul $y = y(x), x \in [a;b]$, vom avea

$$T[y(x)] = \int_{\widehat{AB}} \frac{ds}{v} = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{2gy(x)}} dx . \qquad (1.1.4)$$

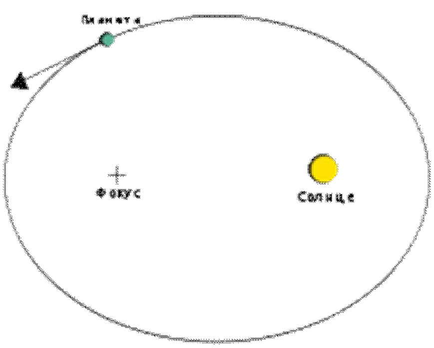
În condițiile menționate vom spune că timpul este o funcțională de tip integrală, care depinde de y şi, care verifică condițiile $y(a) = 0, y(b) = y_2$. Funcționala (1.1.4) are ca domeniu de definiție funcțiile netede (continue şi cu derivata continuă pe $[a;b]$; vom nota această mulțime prin $C^1[a;b]$), graficele cărora au extremitățile în punctele date A şi B. Aceste funcții se numesc linii admisibile. Astfel în problema formulată se cere de aflat curba $y(x) \in C^1[a;b]$, care are ca extremități punctele A şi B, şi pentru care funcționala (1.1.4) ia valoarea minimă.

Sunt cunoscute aplicații concrete, analiza cărora este posibilă folosind problema brahistocronei. De exemplu, problema proiectării formei acoperişului casei astfel ca picăturile de ploaie să coboare din vârful acoperişului în timpul cel mai scurt.

1.1.3. Problema lui Kepler



Să considerăm versiunea simplificată a problemei ce modelează mişcarea planetelor în jurul astrului solar sub acțiunea forței de atracție universală. Mai exact, să determinăm traiectoria de mişcare în raport cu Soarele a unei planete de masă m (restul sistemului solar se ignoră), între două locații cunoscute în baza unor observații, astrul fiind presupus fix, având centrul în originea sistemului de referință şi masa M. Vom considera că influența gravitațională a Soarelui asupra planetei este atât de mare încât orice altă influență, de aceeaşi natură, poate fi neglijată (de aici rezultă că $M >> m$).



Conform legii întâi a lui Kepler, mişcarea planetei în jurul astrului solar este plană (aceasta se mişcă pe traiectorii eliptice, Soarele aflându-se într-unul din focarele elipsei). Aceasta permite să se utilizeze pentru formularea variațională a problemei coordonatele polare $r(t)$ şi $\theta(t)$ ale poziției planetei $(x(t); y(t))$ la momentul de timp t:

$$x(t) = r(t)\cos\theta(t), \;\; y(t) = r(t)\sin\theta(t) .$$

Ținând cont de acestea, energia cinetică a planetei în poziția $(x(t); y(t))$ este

$$E_c = \frac{1}{2} m\left(x'^2(t) + y'^2(t)\right) = \frac{1}{2} m\left(r'^2(t) + r^2(t)\theta'^2(t)\right).$$

Energia potențială o vom afla în baza relației ce exprimă legea atracției gravitaționale:

$$F = -GmM/r^2 ,$$

unde F - forța de interacțiune gravitațională dintre corpurile de mase m şi M, G - constanta atracției universale. În virtutea relației $F = -\frac{\partial E_p}{\partial r}$ avem $E_p = -\int F(r)dr = -GmM/r$. Conform principiului lui Hamilton (a se vedea, de exemplu, [8, p.10; 15, p.236] traiectoria mişcării planetei între două locații $(r_0;\theta_0)$ şi $(r_1;\theta_1)$, cunoscute în baza unor observații, este astfel încât integrala $\int_{t_0}^{t_1}\left(E_c(t) - E_p(t)\right)dt$ ia valoare staționară. Ținând cont de expresiile concrete pentru $E_c(t)$ şi $E_p(t)$, obținem integrala

$$I[r(t),\theta(t)] = \int_{t_0}^{t_1}\left(0.5m\left(r'^2(t) + r^2(t)\theta'^2(t)\right) + GmM/r(t)\right)dt . \qquad (1.1.5)$$

Problema se reduce la determinarea funcțiilor netede $r(t)$ şi $\theta(t)$, care satisfac condițiile $r(t_0) = r_0,\ r(t_1) = r_1,\ \theta(t_0) = \theta_0,\ \theta(t_1) = \theta_1$ şi-i asigură integralei (1.1.5) valoarea extremală.

1.1.4. **Problema echilibrului mecanic al grinzii încastrate la capete** [13]

De determinat forma axei unei grinzi elastice, omogene, cilindrice, de lungime l, încastrată la capete, pe care aceasta o ia fiind încărcată cu o sarcină distribuită $p(x):[0;l] \to \mathbb{R}$ (forța orientată perpendicular către grindă în poziția de echilibru, calculată pe o unitate de lungime).

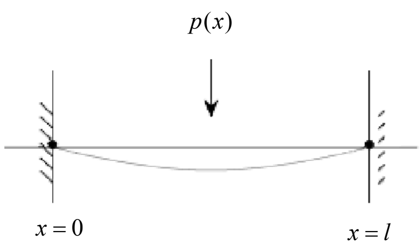


fig. 4

Poziționăm sistemul cartezian de coordonate astfel încât axa absciselor să fie orientată de-a lungul axei grinzii. Fie curba $y = y(x) \in C^2[0;l]$ reprezintă descrierea matematică a formei pe care o ia grinda (adică deplasarea pe verticală a acesteia). Vom considera că îndoirile grinzii sunt mici. Conform unui rezultat din teoria elasticității liniare [13], energia potențială a elementului de grindă de lungime dx este proporțională pătratului curburii acestuia:

$$\frac{1}{2}\mu\left(\frac{y''(x)}{\sqrt{\left(1 + y'^2(x)\right)^3}}\right)^2 dx ,$$

iar pentru îndoiri mici ale grinzii, ultima relație poate fi aproximată prin $\frac{1}{2}\mu y''^2(x)dx$ ($\mu = EI_y$ este o constantă pozitivă, numită factor de rigiditate la încovoiere, determinată de secțiunea transversală şi de materialul grinzii, E - modulul lui Young, iar I_y - momentul de inerție axial al secțiunii transversale a grinzii). Energia potențială a forțelor elastice este $E_{pe} = \frac{\mu}{2}\int_0^l y''^2(x)dx$, iar energia potențială a forțelor gravitaționale (ținând cont de acțiunea forței exterioare) este $E_{pg}=-\int_0^l p(x)y(x)dx$. Astfel energia potențială a grinzii corespunzătoare încărcării este:

$$I[y]:=E_{pe}+E_{pg}=\int_0^l\left\{\frac{1}{2}\mu y''^2(x)-p(x)y(x)\right\}dx. \qquad (1.1.6)$$

Întrucât grinda este dublu încastrată, în extremitățile $x=0$ şi $x=l$ avem

$$y(0)=y'(0)=0,\ y(l)=y'(l)=0. \qquad (1.1.7)$$

Principiul minimului energiei potențiale (principiul lui Bernoulli) [15, p.239] spune că forma pe care o ia grinda sub acțiunea forțelor exterioare este aceea, care face energia potențială înmagazinată în corp să fie staționară. Prin urmare, funcția $y(x)\in C^2[0;l]$ ce descrie poziția grinzii îndoite satisface condițiile (1.1.7) şi realizează un punct staționar al integralei (1.1.6).

1.1.5. Problema echilibrului unei membrane elastice deformate

O membrană elastică în stare de repaus are forma domeniului $D\subset xOy$ (a se vedea fig. 5).

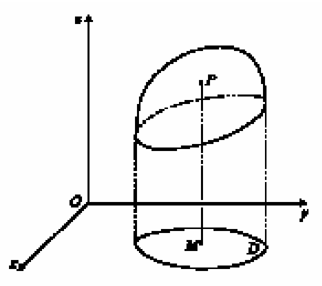


fig. 5

Fie Γ frontiera lui D. Deformăm conturul Γ al membranei în direcția perpendiculară pe planul xOy. Deformarea conturului atrage după sine şi deplasarea punctelor din interiorul membranei. Notăm cu $u(x,y)$ deplasarea (deformația) unui punct oarecare $M(x,y)\in D$. Să se determine poziția de echilibru a membranei dacă cunoaştem deformarea conturului ei.

Dacă materialul membranei posedă proprietăți de elasticitate liniară, atunci se poate admite că energia potențială a membranei deformate este proporțională cu creşterea ariei sale [17, p.]. Aria membranei în starea inițială este $\iint_D dxdy$, iar a membranei deformate va fi $S:=\iint_D\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,dxdy$ [18, p.]. Dacă deplasările sunt mici, aproximăm această arie cu $\iint_D\left(1+\frac{1}{2}\left(u_x^2+u_y^2\right)\right)dxdy$. Rezultă că variația ΔS a ariei suprafeței deformate este

$$\Delta S=\iint_D\left(\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}-1\right)dxdy\approx\frac{1}{2}\iint_D\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy,$$

iar energia potențială de deformație E este

$$E[u(x,y)]=\frac{\mu}{2}\iint_D\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy, \qquad (1.1.8)$$

unde μ este o constantă ce exprimă calitățile elastice ale membranei. Presupunem că se cunosc deplasările punctelor de pe contur, deci că

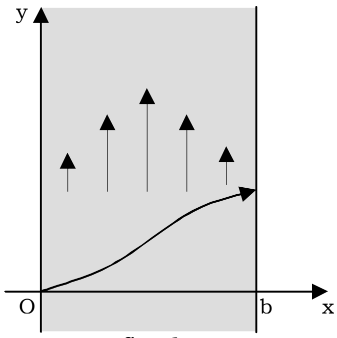


fig. 6

$$u(x,y)|_{(x,y)\in\Gamma} = \varphi(x,y)\big|_{(x,y)\in\Gamma}\,, \tag{1.1.9}$$

$\varphi(x,y)$ fiind o funcție cunoscută.

Poziția de echilibru se realizează când energia potențială este minimă. Se obține astfel următoarea problemă variațională: dintre toate funcțiile $u\in C^1(D)$ ce satisfac condiția (1.1.9), să se determine acea funcție pentru care integrala (1.1.8) ia valoare minimă.

1.1.6. Problema de minimizare a timpului de tranzit al unui râu [14, p.16; 15, p.21]

Pentru un râu cu malurile drepte paralele, de lățime b şi viteza curentului de apă variabilă să considerăm sistemul cartezian de coordonate astfel încât axa Oy să reprezinte unul dintre maluri, iar dreapta $x=b$ - celălalt. Fie viteza curentului de apă definită prin funcția $v=v(x)$, continuă pe $[0;b]$. O barcă, pornind din punctul $O(0;0)$, se deplasează către celălalt mal cu viteză constantă c $(c>\max\limits_{x\in[0;b]} v(x))$ în raport cu apa. Care este traiectoria netedă ce asigură timpul minim de tranzit al râului (a se vedea fig. 6).

Fie α unghiul pe care îl formează la un moment dat axa bărcii cu axa absciselor. Viteza reală de deplasare a bărcii este determinată de egalitățile următoare:

$$dx/dt = c\cos\alpha,\; dy/dt = v + c\sin\alpha\,.$$

Întrucât $y' := \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v+c\sin\alpha}{c\cos\alpha}$, rezultă are loc relația

$$\left(y' - \frac{v}{c\cos\alpha}\right)^2 = tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\,,$$

care, fiind reprezentată sub forma

$$\left(1 - v^2/c^2\right)\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{2vy'}{c}\frac{1}{\cos\alpha} - \left(1 + y'^2\right) = 0\,,$$

permite să exprimăm pe α prin y':

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{-vy'/c \pm \sqrt{v^2y'^2/c^2 + \left(1 - v^2/c^2\right)\left(1 + y'^2\right)}}{1 - v^2/c^2}\,.$$

Atunci avem

$$\frac{1}{c\cos\alpha} = \frac{\sqrt{c^2\left(1+y'^2\right) - v^2} - vy'}{c^2 - v^2}\,.$$

Astfel timpul de tranzit al râului va fi:

$$t = \int_0^b \frac{dt}{dx}dx = \int_0^b \frac{dx}{c\cos\alpha} = \int_0^b \frac{\sqrt{c^2\left(1+y'^2\right) - v^2} - vy'}{c^2 - v^2}dx\,. \tag{1.1.10}$$

Problema formulată constă în a determina curba netedă $y(x)$ care realizează un minim al integralei (1.1.10) şi satisface condiţia iniţială $y(0)=0$. Extremitatea de dreapta a curbei căutate nu este definită apriori. Este de remarcat faptul că oricare ar fi alegerea punctului iniţial de pornire al bărcii, acesta nu influenţează asupra formei curbei optimale. Prin urmare, condiţia iniţială nu este una esenţială.

Exemplele considerate în secţiunile 1.1.2 – 1.1.6 reprezintă probleme de extrem necondiţionat în CV. În acest tip de probleme funcţiile din mulţimile pe care sunt definite integralele de optimizat, satisfac anumite condiţii la extremităţile intervalului (pentru funcţiile de mai multe variabile - pe frontiera domeniului). Este de menţionat faptul că la secţiunea 1.1.6 se examinează o problemă cu extremităţi mobile. O altă clasă de probleme de CV o constituie problemele de extrem condiţionat. În aceste probleme sunt impuse nu numai condiţii la extremităţi, ci şi condiţii suplimentare asupra funcţiilor necunoscute.

1.1.7. Problema oscilaţiilor pendulului simplu

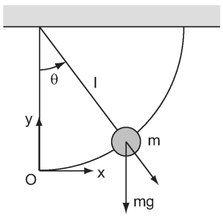


fig.7

Să considerăm în planul vertical un pendul simplu, definit ca un punct material greu de masă m suspendat de un fir inextensibil de lungime l. Să se determine ecuaţiile de mişcare ale pendulului în intervalul de timp $[t_0;t_1]$, dacă acesta se deplasează în plan fără frecare, fiind lăsat liber la momentul iniţial $t=t_0$, din poziţia $(x_0;y_0)$, iar în momentul de timp $t=t_1$ se află în poziţia $(x_1;y_1)$ (a se vedea fig. 7).

Fie $(x(t),y(t))$ poziţia punctului material la momentul de timp t. Atunci, în acest moment, energia cinetică a sistemului va fi $E_c(t)=\frac{1}{2}m\left(x'^2(t)+y'^2(t)\right)$, iar $E_p(t)=mgy(t)$ - energia potenţială (g - acceleraţia gravitaţională).

Conform principiului lui Hamilton, mişcarea pendulului în diapazonul de timp dintre t_0 şi t_1 este astfel încât integrala $\int_{t_0}^{t_1}\left(E_c(t)-E_p(t)\right)dt$ ia valoare staţionară. Ţinând cont de expresiile concrete pentru $E_c(t)$ şi $E_p(t)$, obţinem integrala

$$I[x(t),y(t)]:=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}m\left(x'^2(t)+y'^2(t)\right)-mgy(t)\right)dt\,, \qquad (1.1.11)$$

unde componentele $x(t)$ şi $y(t)$ satisfac condiţia

$$x^2(t)+\left(l-y(t)\right)^2-l^2=0\,. \qquad (1.1.12)$$

Avem de determinat funcțiile $x(t),\ y(t) \in C^1[t_0;t_1]$, supuse condițiilor $x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1$, $y(t_0)=y_0, y(t_1)=y_1$, care verifică relația (1.1.12) şi-i asigură integralei (1.1.11) valoare staționară.

1.1.8. Problema lui Chaplygin [10, p.216; 11, p.155; 12, p.32]

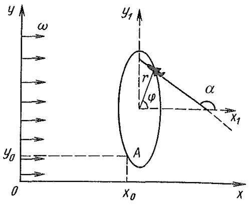


fig. 8

Să presupunem că în planul orizontal xOy se deplasează de-a lungul unei curbe închise un avion cu viteză proprie constantă $|\vec{v}| = v = const$. Traiectoria pe care se mişcă avionul este influențată de acțiunea unui vânt de direcție paralelă axei Ox şi viteză constantă $|\vec{w}| = w < v$ (a se vedea fig. 8).

De aflat curba netedă închisă de-a lungul căreia se va deplasa centrul de greutate al avionului în situația în care acesta va survola într-un interval de timp dat T o suprafață de arie maximă.

Fie traiectoria căutată definită prin intermediul ecuațiilor parametrice $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ ($x(t)$ şi $y(t)$ sunt coordonatele curente ale centrului de greutate al avionului). Viteza avionului se defineşte prin expresia $\vec{V} \equiv \{x'(t), y'(t)\} = \vec{v} + \vec{w}$. Atunci, dacă deplasarea avionului începe în punctul $A(x_0;y_0)$, iar direcția axei acestuia formează un unghi α în raport cu axa Ox, obținem următoarele ecuații de mişcare (proiecții pe axe ale vectorului vitezei avionului)

$$x'(t) = v\cos\alpha - w,\ \ y'(t) = v\sin\alpha, \tag{1.1.13}$$

şi condiții în punctul A (avionul se întoarce în punctul inițial):

$$x(0) = x(T) = x_0,\ \ y(0) = y(T) = y_0\,. \tag{1.1.14}$$

Aria S a teritoriului survolat poate fi exprimată prin relația

$$S[x(t),y(t)] = \frac{1}{2}\int_0^T \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)dt = \frac{1}{2}\int_0^T \big(x(t)v\sin\alpha - y(t)\big(v\cos\alpha - w\big)\big)dt\,. \tag{1.1.15}$$

Astfel se pune problema de a afla funcțiile $x(t)$ şi $y(t)$ ce satisfac condițiile de tip diferențial (1.1.13), condițiile pe frontieră (1.1.14) şi pentru care integrala (1.1.15) ia valoarea maximă.

1.1.9. Problema izoperimetrică

În secțiunea 1.1 a fost formulată deja o astfel de problemă – a lui Dido. O altă variantă a problemei lui Dido ar fi următoarea:

De determinat curba simplă, netedă şi închisă din plan, de lungime l ($l \in \mathbb{R}$ este dat), care delimitează un domeniu mărginit de arie maximă.

Fie $x = x(t),\ y = y(t)$ $\big(x(t),\ y(t) \in C^1[a;b]\big)$ ecuațiile parametrice ale unei curbe netede închise Γ. Întrucât Γ este închisă, avem $x(a) = x(b),\ y(a) = y(b)$. Condiția ca lungimea curbei

Γ să fie egală cu l se scrie astfel:

$$\int_a^b \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt = l, \tag{1.1.16}$$

iar aria figurii mărginite de această curbă este dată de integrala:

$$A[x(t),y(t)] = \frac{1}{2}\int_a^b \left(y(t)x'(t)-x(t)y'(t)\right)dt. \tag{1.1.17}$$

Avem de determinat funcțiile $x(t),\ y(t) \in C^1[a;b]$, supuse condițiilor $x(a)=x(b),\ y(a)=y(b)$, care verifică relația (1.1.16) şi-i asigură integralei (1.1.17) valoarea maximă.

În exemplele prezentate mai sus au fost enunțate probleme de aflare a extremelor unor integrale, care depind de funcțiile ce intervin sub semnul de integrare şi de derivatele acestora. Asemenea integrale sunt aplicații definite pe o mulțime de funcții şi care au valori reale. Ele se numesc *funcționale exprimate prin integrale* (prescurtat FI). În cadrul cursului de *Calcul variațional* (CV) se vor studia probleme de aflare a extremelor FI.

Vom preciza că în problemele enunțate mai sus în secțiunile 1.1.1, 1.1.2 şi 1.1.6 avem funcționale de forma:

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx;$$

în problemele din secțiunile 1.1.3, 1.1.7-1.1.9 de forma:

$$I[y(x),z(x)] = \int_a^b F(x,y(x),z(x),y'(x),z'(x))dx;$$

în problema secțiunii 1.1.4 de forma:

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x,y(x),y'(x),y''(x))dx;$$

în problema secțiunii 1.1.5 de forma:

$$I[u(x,y)] = \iint_D F\left(x,y,u(x,y),u_x(x,y),u_y(x,y)\right)dxdy.$$

Astfel este argumentată necesitatea de a analiza probleme variaționale cu diverse clase de FI, cum ar fi funcționale ce conțin funcția necunoscută şi derivata acesteia; derivate de ordin superior ale funcției necunoscute; mai multe funcții necunoscute şi derivatele acestora; funcții de mai multe variabile etc.