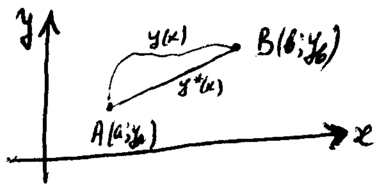
Tema 1. Probleme aplicative ce se reduc la rezolvarea problemelor de calcul variațional. Tipuri de probleme în CV.

Problema 1.1. Să se afle curba netedă din plan de lungime minimă ce conectează punctele $A(a;y_a)$ și $B(b;y_b)$.

Rezolvare:



Fie $y=y(x)$ ecuația explicită a unei curbe netede ($y(x)\in C^1[a;b]$) din plan ce conectează punctele A și B. At. lungimea curbei se determină prin formula:

$$I[y(x)]=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx.$$

Aplicația $I: C^1[a;b]\to\mathbb{R}$ este o f-lă de tip integrală ce depinde de funcția necunoscută $y(x)$ (mai exact, de derivata ei $y'(x)$).

Întrucât curba $y=y(x)$ trece prin punctele A și B (a căror coordonate sunt cunoscute), se satisfac condițiile: $y(a)=y_a$; $y(b)=y_b$.

Astfel problema inițială s-a redus la următoarea problemă de extrem al funcționalei (problemă de CV):

$$(1)\quad\begin{cases} I[y(x)]=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx\to\min \\ y(a)=y_a;\ y(b)=y_b \\ y(x)\in C^1[a;b]\end{cases}$$

— Problemă de optimizare necondiționată

Domeniul de definiție al f-lei $I[y(x)]$ este $C^1[a;b]$, iar în problema de extrem PEF al f-lei — $\mathcal{D}:=\{y\in C^1[a;b] \mid y(a)=y_a;\ y(b)=y_b\}$.
mulțimea funcțiilor admisibile în PEF.

La următoarele lecții vom studia metode exacte (analitice) ~~de rezolvare~~ a problemelor de optimizare necondiționată (în particular, și a problemei (1)). Totuși vom menționa că soluția problemei este evidentă, și anume este segmentul ce unește punctele A și B.

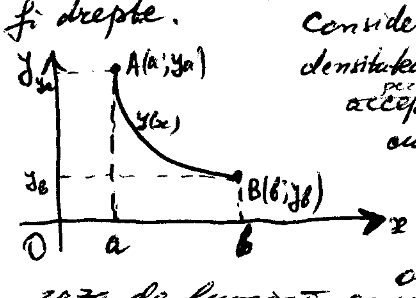
Remarcă: distanța dintre 2 puncte în $\mathbb{R}^3$ la fel va fi segmentul ce le unește

În continuare vom aduce o aplicație din domeniul opticii geometrice, analiza căreia este posibilă, folosind problema brahistocronei.

Problema 1.2. → **Problema refracției luminii:** Să se determine traiectoria razei de lumină ce trece din punctul $A(a;y_a)$ în ~~punctul~~ $B(b;y_b)$ (în plan vertical) în atmosfera Terrei (Pământului), d/ă în fiecare punct este definită funcția $v(y)$ ce exprimă viteza luminii în dependență de înălțimea y deasupra nivelului mării.

Rezolvare: Conform principiului de minimizare a lui Fermat (din optică), raza de lumină ce trece de la punctul A la B într-un plan vertical, se propagă de-a lungul acelei curbe, timpul de parcurgere al căreia este minim.

În mediile omogene în fiecare punct viteza luminii este constantă, iar raza de lumină se propagă de-a lungul unor drepte. Însă dacă mediul este neomogen (așa precum este atmosfera Terrei), atunci viteza de deplasare a luminii variază de la punct la punct, depinzând de proprietățile optice ale mediului, iar traiectoriile razelor de lumină nu vor mai fi drepte.



Considerând în calitate de mediu atmosfera Pământului și, ținând cont că densitatea aerului depinde de înălțimea y deasupra nivelului mării, este permis ~~acceptabil~~ să considerăm că și viteza luminii v depinde de y și se exprimă cu ajutorul unei funcții ~~cunoscute~~ date $v(y)$.

În planul vertical ce trece prin punctele A și B, alegem sistemul cartezian de coordonate astfel încât axa Ox să fie orizontală și ~~să fie~~ amplasată la nivelul mării. Să considerăm că raza de lumină se propagă de-a lungul unei curbe, care reprezintă graficul unei funcții continue și netede $y(x)$ definite pe $[a;b]$ (a se vedea figura).

Ţinând cont că viteza este derivata distanţei în raport cu timpul, avem:

$v(y)=\frac{ds}{dt}$, unde $ds=\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$ este diferenţiala lungimii arcului de curbă $y=y(x)$.

$$\Rightarrow v(y(x))=\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{dt}dx \Rightarrow \frac{dt}{dx}=\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{v(y(x))};$$

Timpul $T[y]$ necesar pentru ca lumina să ajungă din punctul A în B se exprimă prin integrala următoare: $T[y(x)]=\int_0^T dt=\int_a^b \frac{dt}{dx}dx=\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{v(y(x))}dx$.

Astfel problema constă în a determina funcţia $y\in C^1[a;b]$ ce satisface condiţiile la extremităţi $y(a)=y_a$, $y(b)=y_b$ şi p/u care integrala $T[y(x)]$ ia valoare minimă!

$$(2)\quad \begin{cases} T[y(x)]=\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{v(y(x))}dx \to \min \\ y(a)=y_a,\ y(b)=y_b \\ y \in C^1[a;b] \end{cases}$$

— Problema de optimizare necondiţionată

Mulţimea f-lor admisibile în problema de extrem al funcţionalei $T[y(x)]$ este

$$\mathcal{D}:=\{y\in C^1[a;b] \mid y(a)=y_a,\ y(b)=y_b\}.$$

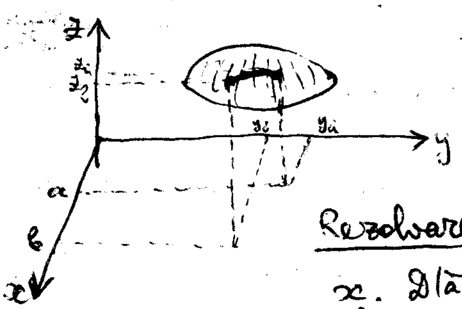
Remarcă: Dacă mediul este omogen $\Rightarrow v(y(x))\equiv const=c \Rightarrow T[y(x)]=\frac{1}{c}\underbrace{\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx}_{\text{lungimea curbei } y(x)}$;

integrala $\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$ – lungimea curbei $y(x)$ care uneşte punctele A şi B.

$\Rightarrow \min T[y]=\frac{1}{c}\underbrace{\min\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx}_{\text{segmentul ce uneşte A şi B}}$ $\Rightarrow$ lumina în medii omogene se propagă de-a lungul unor segmente de dreaptă

Problema 1.3. Problema geodezicelor pe o suprafaţă.

Fie $S\subset\mathbb{R}^3$ o suprafaţă netedă a cărei ecuaţie sub formă implicită este $F(x,y,z)=0$, iar $\overset{\frown}{AB}$ un arc de curbă, aparţinând suprafeţei S, care trece prin punctele $A(a;y_a;z_a)$ şi $B(b;y_b;z_b)$ de pe suprafaţa S.



Numim curbă geodezică a suprafeţei orice arc de curbă de pe suprafaţa S care realizează drumul de lungime minimă dintre două puncte de pe suprafaţă.

Să se determine curba geodezică ce uneşte punctele date A şi B de pe suprafaţă.

Rezolvare: Fie curba căutată poate fi parametrizată de coordonata x. Dacă $y=y(x)$, $z=z(x)$, $x\in[a;b]$, $y,z\in C^1[a;b]$, sunt ecuaţiile parametrice ale unui arc de curbă de pe suprafaţa S, arc ce trece prin A şi B, atunci lungimea arcului $\overset{\frown}{AB}$ este dată de relaţia:

$$I[y(x),z(x)]:=\int_A^B\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}\,dx \qquad (3).$$

Astfel, problema geodezicelor constă în determinarea funcţiilor $y(x)$ şi $z(x)$ de clasă $C^1[a;b]$, care să treacă prin A şi B, să satisfacă ecuaţia suprafeţei $F(x,y(x),z(x))=0$, şi să realizeze minimul f-lei (3), care depinde de două funcţii necunoscute $y(x)$ şi $z(x)$:

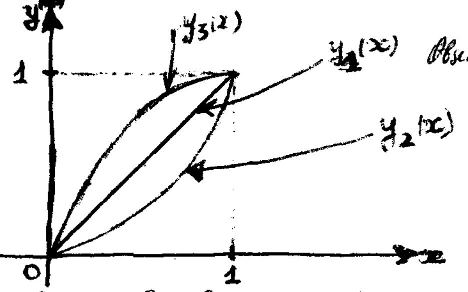
$$\begin{cases} I[y(x),z(x)]=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}\,dx \to \min \\ y(a)=y_a,\ y(b)=y_b,\ z(a)=z_a,\ z(b)=z_b,\ y,z\in C^1[a;b] \\ F(x,y(x),z(x))=0 \end{cases}$$

Problemă de extrem condiţionat cu restricţii olonome

Tema 2. Noțiunile de bază ale CV. Extreme absolute și relative ale funcționalei

Problema 2.1. Să se afle punctele de extrem absolut ale funcționalei
$$I[y(x)] = \int_0^1 y(x)\,dx,$$
fiind dată mulțimea funcțiilor admisibile $\mathcal{D} := \{ y_k(x), k=\overline{1,3} \mid y_1(x) = x,\ y_2(x) = x^2,\ y_3(x) = 1-(x-1)^2 \}$, $x \in [0;1]$.

Rezolvare:



Observăm că punctele $A(0;0)$ și $B(1;1)$ servesc ca extremități pentru fiecare dintre curbele $y_1(x)$, $y_2(x)$ și $y_3(x)$.

Prin urmare avem următoarele condiții pe frontieră:
$$y_k(0)=0,\ y_k(1)=1,\ k=\overline{1,3}.$$

Vom calcula valorile funcționalei $I[y(x)]$ în $y_k(x)$, $k=\overline{1,3}$:
$$I[y_1(x)] = \int_0^1 y_1(x)dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2};$$
$$I[y_2(x)] = \int_0^1 y_2(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3};$$
$$I[y_3(x)] = \int_0^1 y_3(x)dx = \int_0^1 \left(1-(x-1)^2\right)dx = \left(x - \frac{(x-1)^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Prin urmare, pe mulțimea funcțiilor admisibile $\mathcal{D}$, funcția $y_2(x) = x^2$ ~~De~~ aici realizează un punct de minim absolut al funcționalei $I[y(x)]$, iar funcția $y_3(x) = 1-(x-1)^2$ realizează un punct de maxim absolut. ▲

Fie $I[y]$ o funcțională definită pe spațiul X, iar $\mathcal{D}$ – mulțimea funcțiilor admisibile (MFA) ~~într~~-o problemă de extrem a funcționalei $I[y]$. Evident $\mathcal{D} \subset X$.

Definiția 1. Se spune că funcționala $I[y]$ admite un maxim absolut pentru elementul $y_0 \in \mathcal{D}$, dacă pentru orice funcție $y \in \mathcal{D}$ avem $I[y_0] \geq I[y]$. Dacă pentru orice funcție $y \in \mathcal{D}$ avem $I[y_0] \leq I[y]$, atunci se spune că y_0 realizează un minim absolut al funcționalei $I[y]$ pe mulț. funcțiilor admisibile (MFA).

Un punct de minim sau de maxim absolut se numește punct de extrem absolut.

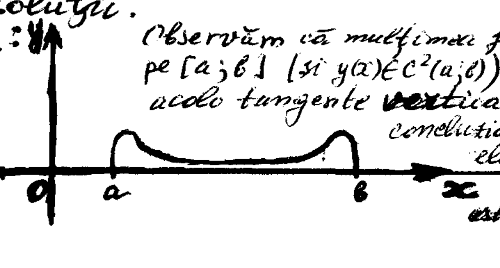
Ca și în cazul problemei de extrem al funcției de mai multe variabile (cazul finit-dimensional), dacă mulțimea funcțiilor admisibile (MFA) ~~într~~-o problemă de extrem a funcționalei nu este închisă, problema de CV poate să nu aibă soluții. Condiția că mulțimea funcțiilor admisibile este închisă este dificil de verificat în cazul infinit-dimensional (cazul probl. de CV).

Problema de CV ar putea să nu aibă soluții chiar și atunci când MFA este o mulțime închisă. Cauza este că într-un spațiu normat infinit-dimensional nu pentru orice mulțime închisă și mărginită se poate afirma că funcția continuă pe această mulțime este mărginită și își atinge valorile extreme.

Vom da un exemplu de problemă de CV care nu are soluții:

Problema 2.2. Să se arate că următoarea problemă de CV
$$\begin{cases} I[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx \longrightarrow \min \\ y(a)=y(b)=0;\ y'(a)=y'(b)=\infty \\ y(x) \in C^2(a;b);\ y(x) \in C[a;b] \end{cases}$$
nu are soluții.

Rezolvare:



Observăm că mulțimea funcțiilor admisibile constă din funcții $y(x)$ continue pe $[a;b]$ (și $y(x) \in C^2(a;b)$) ce se anulează ~~în~~ extremitățile a și b și au acolo tangente verticale. Ținând cont și de expresia funcționalei (f-lei) $I[y]$ concluzionăm că problema constă în calculul drumului celui mai scurt din punctul $A(a;0)$ în $B(b;0)$, cu condiția că la extremitățile drumului direcția de mișcare este verticală.

Din desen se vede că funcția de clasă cerută se poate alege a.î. lungimea ~~graficului~~ ei se va deosebi oricât de puțin de lungimea segmentului $[a;b]$ al axei Ox. Iar segmentul ce unește punctele A și B are cea mai mică lungime dintre toate curbele ce conectează A cu B. Dar acest segment este graficul funcției identic egale cu zero, care nu este o funcție admisibilă în această problemă de extrem al funcționalei (PEF). Întrucât ~~problema dată~~ funcționala $I[y(x)]$ nu își atinge minimul pe ~~mulțimea~~ MFA, problema de CN formulată nu are soluții. ▲

<u>Problema 2.3.</u> Să se arate că funcția $y^*(x)$ realizează un punct de minim absolut al funcționalei $I[y(x)]$ pe mulțimea funcțiilor admisibile (MFA).

a). $y^*(x)=x$; $\begin{cases} I[y(x)]=\int_0^1 y'^2(x)dx \to \min, \\ y(0)=0,\ y(1)=1. \end{cases}$ $y(x)\in\mathcal{D}:=\{y\in C^1[0,1]\,|\,y(0)=0,\ y(1)=1\}$

b) $y^*(x)=x^3-x^2$; $\begin{cases} I[y(x)]=\int_0^1 y''^2(x)dx \to \min, \\ y(0)=y'(0)=y(1)=0 ;\ y'(1)=1. \end{cases}$

<u>Rezolvare</u>:

a) Evident că funcția $y^*(x)=x\in C^1[0;1]$ și satisface condițiile la extremități $y^*(0)=0,\ y^*(1)=1$. Prin urmare, $y^*(x)=x$ aparține mulțimii funcțiilor admisibile (MFA) $\mathcal{D}$, definită astfel

$$\mathcal{D}:=\{y(x)\in C^1[0;1]\ |\ y(0)=0,\ y(1)=1\}.$$

Considerăm o funcție arbitrară $y(x)\in\mathcal{D}$. Funcția $y(x)$ se poate reprezenta sub forma:

$y(x)=y^*(x)+\delta y(x)$, unde variația funcției $\delta y(x)\in C^1[0;1]$ și satisface la ~~frontieră~~ extremități condițiile $\delta y(0)=y(0)-y^*(0)=0$, $\delta y(1)=y(1)-y^*(1)=0$.

Vom studia creșterea funcționalei $\Delta I = I[y(x)]-I[y^*(x)]$. Avem

$$\Delta I = I[y^*(x)+\delta y(x)]-I[y^*(x)]=\int_0^1\left(y^{*\prime}(x)+\delta y'(x)\right)^2dx-\int_0^1\left(y^{*\prime}(x)\right)^2dx=$$
$$=2\cdot\int_0^1 y^{*\prime}(x)\cdot\delta y'(x)dx+\int_0^1(\delta y'(x))^2dx.$$

Întrucât $y^{*\prime}(x)=1$ avem

$$\int_0^1 y^{*\prime}(x)\cdot\delta y'(x)dx=\int_0^1\delta y'(x)dx=\delta y(x)\Big|_{x=0}^{x=1}=\delta y(1)-\delta y(0)=0-0=0$$

și atunci

$$\Delta I = I[\underbrace{y^*(x)+\delta y(x)}_{y(x)}]-I[y^*(x)]=\int_0^1\underbrace{(\delta y'(x))^2}_{\geq 0}dx\geq 0 \Rightarrow I[y(x)]\geq I[y^*(x)],\ \forall y\in\mathcal{D}$$

D/ce funcția admisibilă $y(x)=y^*(x)+\delta y(x)\in\mathcal{D}$ s-a ales în mod arbitrar și $I[y(x)]\geq I[y^*(x)]$, rezultă că funcția $y^*(x)=x$ realizează un minim absolut al funcționalei $I[y(x)]$ pe mulțimea funcțiilor admisibile $\mathcal{D}$. ▲

b) Vom utiliza definiția 1. Conform acesteia este necesar să se arate că $I[y(x)]\geq I[y^*(x)]$ pentru orice funcție admisibilă $y(x)$. Definim mulțimea funcțiilor admisibile:

$$\mathcal{D}:=\{y(x)\in C^2[0;1]\ |\ y(0)=y'(0)=y(1)=0,\ y'(1)=1\}.$$

Ușor se verifică că funcția $y^*(x)=x^3-x^2\in\mathcal{D}$

Considerăm o funcție arbitrară $y(x)\in\mathcal{D}$. Funcția $y(x)$ se reprezintă sub forma:

$y(x)=y^*(x)+\delta y(x)$, unde variația funcției $\delta y(x)\in C^2[0;1]$ și satisface pe frontieră condițiile:

$$\delta y(0)=\delta y'(0)=\delta y(1)=\delta y'(1)=0. \qquad (2.1)$$