În cadrul lecțiilor de seminar se vor examina metode analitice exacte de rezolvare a unor clase de probleme variaționale folosind metoda variațiilor.

1 STUDIUL UNOR PROBLEME DE APLICAȚIE CE SE REDUC LA REZOLVAREA PROBLEMELOR DE CALCUL VARIAȚIONAL. TIPURI DE PROBLEME VARIAȚIONALE

Problema 1.1. Problema distanţei dintre două puncte în plan

Să se formuleze ca problemă de calcul variațional problema de aflare a curbei netede din plan de lungime minimă ce unește punctele $A(a;y_a)$ *şi* $B(b;y_b)$. *Să se afle ecuația acestei curbe.*

Se ştie că lungimea curbei netede din plan definită prin ecuația sa explicită $y=y(x),\ x\in[a;b]$ se determină prin formula $\int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}dx$. Atunci lungimea curbei se determină prin formula:

$$I[y(x)]=\int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}dx .$$

Aplicația $I:C^1[a;b]\to\mathbb{R}$ este o funcțională de tip integrală ce depinde de funcția necunoscută $y(x)$ (mai exact, de derivata ei $y'(x)$). Întrucât curba $y=y(x)$ trece prin punctele A și B (a căror coordonate sunt cunoscute), se satisfac condițiile $y(a)=y_a,\ y(b)=y_b$. Astfel problema inițială s-a redus la următoarea problemă de extrem al funcționalei

$$\begin{gathered} I[y(x)]=\int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}dx \to \min \\ y\in D:=\left\{y\in C^1[a;b] \,\middle\|\, y(a)=y_a,\ y(b)=y_b\right\} \end{gathered} . \tag{1}$$

care reprezintă o problemă variațională de extrem necondiționat. De menționat că domeniul de definiție al funcționalei $I[y(x)]$ este $C^1[a;b]$, iar mulțimea funcțiilor admisibile în problema de extrem al funcționalei - $D:=\left\{y\in C^1[a;b] \,\middle\|\, y(a)=y_a,\ y(b)=y_b\right\}$.

Soluția problemei formulate este unică şi bine cunoscută – segmentul de dreaptă ce uneşte punctele A şi B. Într-adevăr, deoarece integrandul $F=\sqrt{1+y'^2(x)}$ nu depinde explicit de x şi $y(x)$, conform cazului 1) examinat la secțiunea 1.3.2, soluția generală a ecuației Euler-Lagrange (EEL) este dată de relația

$$y(x)=c_1x+c_2 \quad (c_1,c_2\in\mathbb{R}). \tag{2}$$

Folosind condițiile la extremități se determină constantele c_1 şi c_2:

$$c_1 = (y_b - y_a)/(b-a),\ c_2 = y_a - a(y_b - y_a)/(b-a),$$

iar ecuația segmentului de dreaptă căutat este

$$y(x) = ((y_b - y_a)/(b-a))(x-a) + y_a .$$

Pentru testare se vor considera punctele $A(1;2)$ şi $B(2;3)$. Problema cu condiții la limită pentru ecuația Euler-Lagrange este

$$y''(x) = 0,\ y(1) = 2,\ y(2) = 3 . \tag{3}$$

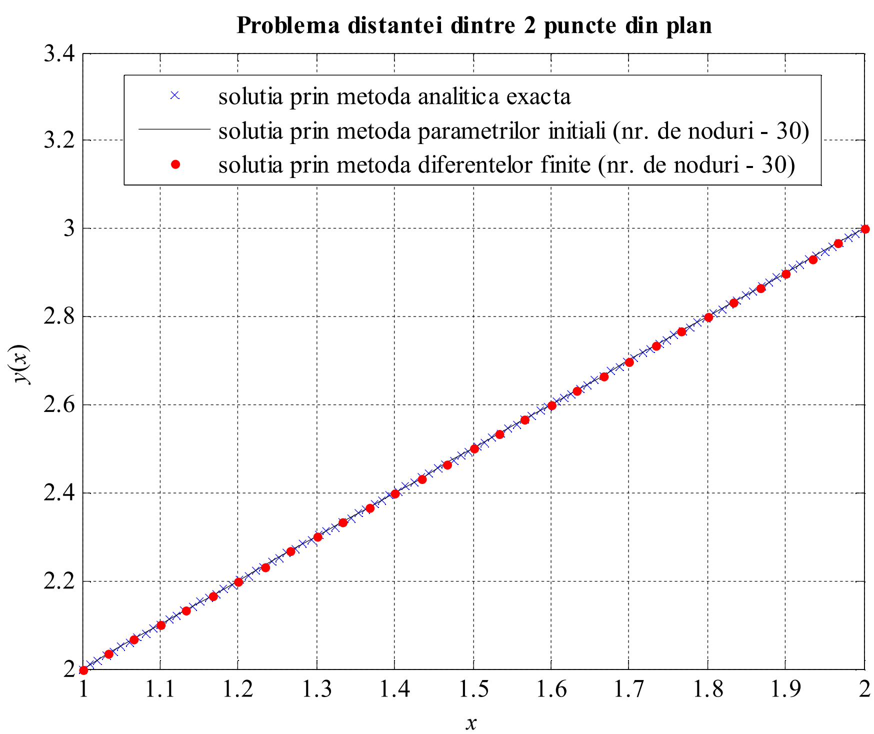
Pentru a obține soluția acesteia conform metodei parametrilor inițiali se efectuează substituțiile $y_1 := y,\ y_2 := y'$ şi se rezolvă probleme Cauchy de forma

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 0 \end{cases},\quad \begin{cases} y_1(1) = 2 \\ y_2(1) = t \in \mathbb{R} \end{cases}. \tag{4}$$

Se caută valori ale parametrului t pentru care componenta y_1 a soluției problemei (4) satisface $|y_1(2) - 3| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ suficient de mic.

Problema (3) se poate rezolva şi prin metoda diferențelor finite (a se vedea secțiunea 3.?).

În continuare se vor ilustra grafic rezultatele obținute prin aplicarea metodei analitice exacte şi a metodelor aproximative examinate în capitolul II al lucrării.



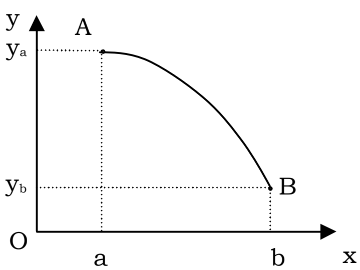
Remarca 1.1. Distanța dintre două puncte în $\mathbb{R}^3$ va fi la fel segmentul ce le unește.

În continuare vom aduce o aplicație din domeniul opticii geometrice, analiza căreia este posibilă, folosind problema brachistocronei.

Problema 1.2. Problema refracției luminii

Să se afle traiectoria razei de lumină ce trece din punctul $A(a;y_a)$ *în* $B(b;y_b)$ *(în plan vertical) în atmosfera Terrei, dacă în fiecare punct este definită funcția* $v(y)$ *ce exprimă viteza luminii în dependență de înălțimea* y *deasupra nivelului mării.*

Conform principiului lui Fermat (din optică), raza de lumină care trece de la punctul A la B într-un plan vertical, se propagă de-a lungul acelei curbe, timpul de parcurgere al căreia este minim. În mediile omogene viteza luminii este constantă, iar lumina se propagă de-a lungul unor drepte. Însă dacă mediul este neomogen (așa precum este atmosfera Terrei), atunci viteza de deplasare a luminii variază de la punct la punct, iar traiectoriile razelor de lumină nu vor mai fi drepte.



Considerând în calitate de mediu atmosfera Pământului şi ținând cont că densitatea aerului depinde de înălțimea y deasupra nivelului mării, se poate considera că şi viteza luminii v depinde de y şi se exprimă cu ajutorul unei funcții cunoscute $v(y)$.

În planul vertical ce trece prin punctele A şi B, se alege sistemul cartezian de coordonate astfel, încât axa Ox să fie orizontală şi amplasată la nivelul mării. Fie cunoscute coordonatele $A(a;y_a)$ şi $B(b;y_b)$. Se consideră că raza de lumină se propagă de-a lungul unei curbe, care reprezintă graficul unei funcții continue şi netede $y(x)$ definite pe $[a;b]$ (a se vedea fig.). Ținând cont de presupunerile făcute, precum și de faptul că viteza este derivata distanței în raport cu timpul, avem $v(y)=\frac{ds}{dt}$, unde $ds=\sqrt{1+y'^2(x)}dx$ este diferențiala lungimii arcului de curbă $y=y(x)$. De aceea $dt=\frac{ds}{v(y)}=\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}dx}{v(y)}$, de unde rezultă $\frac{dt}{dx}=\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{v(y(x))}$. Timpul $T[y(x)]$ necesar pentru ca lumina să ajungă din punctul A în B se exprimă prin integrala

$$T[y(x)]=\int_0^T dt=\int_a^b \frac{dt}{dx}dx=\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{v(y(x))}dx\,. \tag{5}$$

Astfel, problema constă în a determina funcția $y(x)\in C^1[a;b]$, care satisface condițiile $y(a)=y_a,\ y(b)=y_b$ şi pentru care integrala (5) ia valoare minimă:

$$T[y(x)] = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{v(y(x))} dx \to \min$$
$$y(x) \in D := \left\{ y(x) \in C^1[a;b] \middle| y(a) = y_a,\ y(b) = y_b \right\} \quad (6)$$

Problema variațională (6) e de extrem necondiționat, iar D e mulțimea funcțiilor admisibile.

Remarca 1.2. Dacă mediul este omogen, atunci $v(y(x)) \equiv const = c$, iar $T[y(x)] = \frac{1}{c}\int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}dx$, unde integrala reprezintă lungimea curbei $y(x)$ ce unește punctele A și B. Întrucât curba de lungime minimă ce unește punctele A și B este segmentul de dreaptă, din relația $\min T[y(x)] = \frac{1}{c}\min\int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}dx$ rezultă că lumina în medii omogene se propagă de-a lungul unor segmente de dreaptă.

Problema 1.3. Problema geodezicelor pe o suprafață

Fie $S := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| F(x,y,z) = 0 \right\}$ $(F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$ *o suprafață netedă definită implicit, iar* $\widehat{AB}$ *un arc de curbă, aparținând suprafeței* S*, care trece prin punctele* $A(a;y_a;z_a)$ *și* $B(b;y_b;z_b)$ *de pe suprafața* S *(a se vedea fig. 7). Să se afle o curbă geodezică a suprafeței ce unește punctele* A *și* B*.*

Numim curbă geodezică a suprafeței orice arc de curbă de pe suprafața S care realizează drumul de lungime minimă dintre două puncte de pe suprafață.

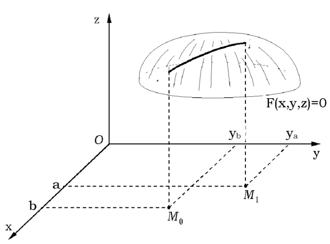


fig. 7

Dacă $y = y(x),\ z = z(x),\ x \in [a;b],\ y,z \in C^1[a;b]$, sunt ecuațiile parametrice (parametrizare realizată de coordonata x) ale unui arc de curbă de pe suprafața S care trece prin A și B, atunci lungimea arcului $\widehat{AB}$ este dată de relația [15, p.]:

$$I[y(x),z(x)] = \int_A^B \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}\,dx. \quad (7)$$

În acest fel, problema geodezicelor constă în determinarea funcțiilor $y(x)$ și $z(x)$ de clasă $C^1[a;b]$, care să treacă prin A și B, să satisfacă ecuația suprafeței $F(x,y(x),z(x)) = 0$, și să realizeze minimul funcționalei (7), care depinde de două funcții necunoscute $y(x)$ și $z(x)$:

$$I[y(x),z(x)] = \int_A^B \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}\,dx \to \min$$
$$(y,z) \in D := \left\{ (y,z) \in C^1[a;b] \times C^1[a;b] \middle| y(a) = y_a, y(b) = y_b, z(a) = z_a, z(b) = z_b, F(x,y(x),z(x)) = 0 \right\} \quad (8)$$

Problema variațională (8) este de extrem condiționat cu restricție olonomă. Mulțimea liniilor admisibile pentru funcționala (7) reprezintă totalitatea arcelor de curbă de pe suprafața S cu tangenta continuă, care trec prin punctele date A şi B.

În cazul în care suprafața $S \subset \mathbb{R}^3$ este dată explicit $z(x) = F(x, y(x))$, se va minimiza funcționala $I[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x) + \left(F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x))y'(x)\right)^2}\, dx$. De exemplu, geodezicele de pe suprafața descrisă de paraboloidul $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ pot fi aflate minimizând funcționala $I[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x) + \left(x + y(x)y'(x)\right)^2}\, dx$.

În aeronautică, pentru a minimiza distanța parcursă (economie de combustibil), avioanele urmează căi geodezice circumpolare de pe glob.

Problema 1.4. Problema planificării producerii

Prin stoc se înțelege o cantitate de bunuri materiale depozitate ca rezervă într-o unitate economică, destinată vânzării sau utilizării în circuitul producției. Desfăşurarea normală a activității unei unități economice impune asigurarea unor cantități corespunzătoare de materie primă, combustibil şi a altor resurse materiale, adică existența anumitor rezerve ale stocurilor. Simultan, constituirea unui stoc presupune cheltuieli de producție sau de cumpărare, cheltuieli de stocaj (depozitare, supraveghere, întreținere), resurse financiare înghețate, eventuale pierderi datorită deprecierii bunurilor în cursul timpului. Evident, nu este convenabilă o rezervă prea mare (apar pierderi legate de stoparea procesului de producere sau comerț). Un stoc funcționează în condiția când consumul (cererea) are caracter continuu, iar aprovizionarea şi reaprovizionarea (comenzile) se fac la anumite momente de timp. Astfel stocul îndeplineşte o funcție regulatoare, garantează o stabilitate în exploatare, micşorând riscul lipsei de bunuri necesare procesului de producție. Stocul variază în timp datorită intrărilor şi ieşirilor de bunuri economice.

Problema de gestiune a stocului constă în determinarea volumului (nivelului) stocului creat şi a momentelor de aprovizionare – reaprovizionare – când şi cât produs trebuie comandat pentru ca o funcție economică (criteriul care apreciază modul de funcționare a stocului) să ia valoare optimă. De regulă, această funcție reprezintă cheltuielile legate de funcționarea stocului.

Să considerăm un stoc cu un singur depozit şi cu un singur produs depozitat. Vom nota prin $s(t)$ volumul (nivelul) stocului în momentul $t \geq 0$. Vom considera că $s(t) \geq 0$ pe durata de timp $[0;T]$ examinată. Considerând că în momentul t intră în stoc cantitatea $p(t)$ şi iese $v(t)$, pentru Δt mic putem scrie următoarea ecuație a balanței de stoc:

$$s(t+\Delta t)=s(t)+p(t)\Delta t-v(t)\Delta t+O(\Delta t).$$

Uneori se poate admite $O(\Delta t)/\Delta t\to 0$ când $\Delta t\to 0$, şi atunci obținem ecuația diferențială:

$$s'(t)=p(t)-v(t).$$

Această ecuație arată că viteza schimbării volumului stocului este egală cu diferența dintre intensitatea de intrare şi cea de ieşire a produsului din stoc.

E posibil ca o anumită cantitate de produs stocat să se piardă din cauze obiective, când, spre exemplu, produsul este perisabil (supus alterării). Dacă cantitatea pierdută e proporțională cu volumul stocat, atunci $s'(t)=p(t)-v(t)-\alpha s(t)$.

Problema planificării producerii. În urma analizei datelor anterioare referitoare la desfăşurarea activității o companie a decis că în condițiile în care este dat un stoc inițial $\tilde{s}(0)=\tilde{s}_0$ şi se doreşte o rată a vânzărilor $v(t)$ pe intervalul de timp $[0;T]$ cea mai bună rată a producției la momentul t este definită prin funcția $\tilde{p}(t)$. Admițând că produsul este perisabil, iar cantitatea pierdută e proporțională cu volumul stocat (cu coeficientul de proporționalitate $\alpha>0$ dat), obținem următoarea ecuație diferențială a balanței de stoc

$$\tilde{s}'(t)=\tilde{p}(t)-v(t)-\alpha\tilde{s}(t),$$

de unde avem $\tilde{p}(t)=\tilde{s}'(t)+\alpha\tilde{s}(t)+v(t)$.

În condiția în care, de fapt, este disponibil un stoc inițial $s(0)=s_0\neq\tilde{s}_0$, compania a luat decizia ca să mențină aceeaşi rată a vânzărilor $v(t)$ pentru $t\in[0;T]$. Întrucât procesul de producție e continuu, pe durata de timp $t\in[0;T]$ avem $s(t)>0$. Atunci orice rată de producție previzibilă, definită prin funcția $p(t)$, va genera un stoc $s(t)$ diferit de $\tilde{s}(t)$ (cel puțin în vecinătatea lui $t=0$), iar ecuația balanței de stoc va fi, respectiv,

$$s'(t)=p(t)-v(t)-\alpha s(t).$$

În consecință, compania suportă costuri adiționale (legate de lucrările de manipulare şi de depozitare), care se exprimă prin funcționala

$$C=\int_0^T\left(\beta^2\left(s(t)-\tilde{s}(t)\right)^2+\left(p(t)-\tilde{p}(t)\right)^2\right)dt\qquad(\beta=const),$$

şi care ține cont de devierile în volumul stocului $s(t)$ şi ratei producției $p(t)$ de la valorile dorite $\tilde{s}(t)$ şi $\tilde{p}(t)$. Dacă se introduce funcția de deviere a stocului $y(t):=s(t)-\tilde{s}(t)$, atunci, ținând cont de relațiile $\tilde{p}(t)=\tilde{s}'(t)+\alpha\tilde{s}(t)+v(t)$ şi $p(t)=s'(t)+\alpha s(t)+v(t)$, pentru funcția de deviere a ratei producției se va obține:

$p(t)-\tilde{p}(t)=s'(t)-\tilde{s}'(t)+\alpha\left(s(t)-\tilde{s}(t)\right)=y'(t)+\alpha y(t)$. Astfel, expresia pentru costul C se va scrie astfel:

$$C\left[y(t)\right]=\int_0^T\left(\beta^2 y^2(t)+\left(y'(t)+\alpha y(t)\right)^2\right)dt. \tag{9}$$

Problema formulată se reduce la determinarea funcției $y\in D:=\left\{y\in C^1[0;T]\,\middle\|\, y(0)=s_0-\tilde{s}_0\right\}$ pentru care funcționala (9) ia valoare minimă.