1.2. Noţiuni şi concepte fundamentale ale calculului variaţional

În această secțiune se vor introduce noțiunile şi conceptele de bază ce vor fi utilizate în continuare în studiul diverselor probleme variaționale. Se vor obține condiții necesare pentru caracterizarea extremelor locale ale funcționalelor definite pe submulțimi ale spațiilor liniare normate.

Calculul variațional clasic rezolvă problema extremelor funcționalelor prin mijloace asemănătoare celor folosite de analiza clasică în rezolvarea problemei extremelor funcțiilor de una sau mai multe variabile.

În cazul extremelor funcțiilor de n variabile, cele n variabile $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt coordonatele unui element (unui punct) $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ din $\mathbb{R}^n$, acesta din urmă fiind un spațiu liniar n-dimensional. În $\mathbb{R}^n$ avem definite operațiile de adunare a două asemenea elemente şi operația de înmulțire a unui element cu un număr real. În plus, în $\mathbb{R}^n$ se poate introduce o normă (o distanță), astfel încât să putem vorbi de vecinătate a unui punct, noțiune ce are un rol important în soluționarea problemei de extrem.

Aplicațiile 1.1.1 – 1.1.8 de la secțiunea precedentă sugerează faptul că domeniul de definiție natural al unei funcționale este o mulțime de funcții reale definite pe un interval în cazul funcțiilor de o variabilă, sau pe un domeniu în cazul funcțiilor de mai multe variabile, care satisfac anumite condiții de netezime (de exemplu, derivata continuă sau continuă pe porțiuni) şi anumite condiții la extremitățile intervalului sau pe frontiera domeniului. Mulțimile de funcții reale definite pe un interval sau domeniu, ce posedă anumite condiții de netezime, înzestrate cu operația de adunare a funcțiilor şi cu operația de înmulțire a funcțiilor cu numere reale formează spații liniare de dimensiune infinită. Mai mult, aceste spații liniare pot fi înzestrate cu anumite norme şi se poate astfel vorbi despre vecinătatea unei funcții.

1.2.1. Funcţionale continue în spaţii liniare normate

Fie X un spaţiu liniar real. În cele ce urmează, prin funcţională definită pe spaţiul X vom înţelege o aplicaţie $I: X \to \mathbb{R}$.

Definiţia 1.2.1. Se numeşte normă pe X o funcţională $\|\cdot\|_X : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ce verifică proprietăţile:

1) $\|x\|_X \geq 0, \forall x \in X$ şi $\|x\|_X = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$;

2) $\|\lambda x\|_X = |\lambda| \|x\|_X, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X$;

3) $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X, \forall x, y \in X$ (inegalitatea triunghiului).

Orice normă satisface inegalitatea triunghiului inversă ([RS]):

$$\|x - y\|_X \geq \left| \|x\|_X - \|y\|_X \right|, \forall x, y \in X.$$

Spaţiul liniar X în care este definită o normă se numeşte spaţiu liniar normat.

Exemplul 1.2.1.

1) Spaţiul liniar $C[a;b]$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ al funcţiilor continue $y: [a;b] \to \mathbb{R}$, în care este definită norma $\|y\|_{C[a;b]} = \max\limits_{x \in [a;b]} |y(x)|$ este un spaţiu liniar normat [RS];

2) Spaţiul liniar $C^m[a;b] := \left\{ y: [a;b] \to \mathbb{R} \middle| \, y^{(k)}(x) \in C[a;b], k = \overline{0,m} \right\}$ cu norma $\|y\|_{C^m[a;b]} = \sum\limits_{k=0}^{m} \max\limits_{x \in [a;b]} \left| y^{(k)}(x) \right|$ $\left(y^{(0)}(x) \equiv y(x) \right)$ este un spaţiu liniar normat [RS];

3) Spaţiul liniar $C^1([a;b]; \mathbb{R}^n) = \left\{ \overline{y}: [a;b] \to \mathbb{R}^n; \, \overline{y}(x) = \left(y_1(x), ..., y_n(x) \right), y_k(x) \in C^1[a;b], k = \overline{1,n} \right\}$ cu norma $\|\overline{y}\| = \max\limits_{x \in [a;b]} \sqrt{y_1^2(x) + ... + y_n^2(x)} + \max\limits_{x \in [a;b]} \sqrt{y_1'^2(x) + ... + y_n'^2(x)}$ este un spaţiu liniar normat [RS];

4) Spaţiul liniar $C^m(\Omega) = \left\{ y: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \middle| \, \exists y(\overline{x}), y'(\overline{x}), \ldots, y^{(m)}(\overline{x}) \in C(\Omega) \right\}$ cu norma $\|y\|_{C^m(\Omega)} = \sum\limits_{k=0}^{m} \max\limits_{\overline{x} \in \Omega} \left| y^{(k)}(\overline{x}) \right|$ este un spaţiu liniar normat [RS]. ■

Remarca 1.2.1. Într-un spaţiu liniar pot fi definite mai multe norme [RS].

Fie X un spaţiu liniar normat cu norma $\|\cdot\|_X$ definită în acesta (în continuare vom nota $\left(X; \|\cdot\|_X \right)$).

Definiţia 1.2.2. Fie $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Şirul $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge către $y \in X$ (vom utiliza notaţia $y_n \to y$) dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n \to \infty} \|y_n - y\|_X = 0$. Şirul $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ se numeşte şir fundamental (şir Cauchy) dacă şi numai dacă $\lim\limits_{m,n \to \infty} \|y_m - y_n\|_X = 0$. Un spaţiu liniar normat, în care orice şir fundamental este convergent se numeşte spaţiu Banach (spaţiu complet).

Spaţiile liniare normate din exemplul 1.2.1 sunt spaţii Banach [1].

În continuare, vom conveni ca funcționalele să fie notate prin litere mari latine, marcând argumentele lor, deci funcțiile de care depind, între paranteze drepte. În acelaşi timp vom nota în paranteze rotunde argumentul sau argumentele funcțiilor.

Definiția 1.2.3. Funcționala $I: X \to \mathbb{R}$ este continuă în $y^* \in X$ în sensul unei anumite norme dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice element $y \in X$ ce satisface $\|y - y^*\|_X < \delta(\varepsilon)$, are loc inegalitatea $|I[y] - I[y^*]| < \varepsilon$.

Definiția 1.2.3 este echivalentă cu următoarea:

Definiția 1.2.4. Funcționala $I: X \to \mathbb{R}$ este continuă în $y^* \in X$ în sensul unei anumite norme pe X, dacă pentru orice şir $\{y_n\} \subset X$ astfel încât $y_n \to y^*$ are loc relația $I[y_n] \to I\left[y^*\right]$.

Definiția 1.2.5. Funcționala $I: X \to \mathbb{R}$ este continuă pe mulțimea $D \subset X$ în sensul normei spațiului X, dacă aceasta este continuă în fiecare punct $y^* \in D$.

Exemplul 1.2.2. *Să se arate că funcționala* $I[y(x)] = \int_0^1 \left(y(x) + 2y'(x)\right)dx$, *definită pe* $X = C^1[0;1]$, *este continuă în* $y^*(x) = x$ *în sensul normei din* $C^1[0;1]$.

Orice funcție $y(x) \in C^1[0;1]$ ce satisface condiția $\|y(x) - y^*(x)\|_{C^1[0;1]} < \delta$ $(\delta > 0)$ va satisface şi condițiile $|y(x) - x| < \delta, |y'(x) - 1| < \delta$. Atunci avem

$$|I[y(x)] - I[x]| = \left|\int_0^1 \left(y(x) + 2y'(x) - x - 2\right)dx\right| \le \int_0^1 |y(x) - x|dx + 2\int_0^1 |y'(x) - 1|dx < 3\delta .$$

Oricare ar fi $\varepsilon > 0$, alegând $\delta = \varepsilon/3$, avem $|I[y(x)] - I[x]| < \varepsilon$, adică funcționala $I[y(x)]$ este continuă în $y^*(x)$ în sensul normei din $C^1[0;1]$. ■

Exemplul 1.2.3. *Fie* $\left(X;\|\cdot\|_X\right)$ *un spațiu liniar normat. Să se arate că funcționala* $I\left[y\right] = \|y\|$ $\left(y \in X\right)$ *este continuă pe* X.

Folosind inegalitatea triunghiului inversă obținem:

$$\left|I\left[y\right] - I\left[y^*\right]\right| = \left|\|y\| - \|y^*\|\right| \le \|y - y^*\| \quad \left(y, y^* \in X\right),$$

de unde rezultă că pentru $y \to y^*$ avem $I\left[y\right] \to I\left[y^*\right]$. Astfel funcționala $I\left[y\right]$ este continuă în orice punct $y^* \in X$, adică este continuă pe X. ■

Exemplul 1.2.4. *Fie* $F \in C\left(\left[a;b\right] \times \mathbb{R}^2\right)$. *Atunci pentru* $y \in X := C^1\left[a;b\right]$ *funcționala* $I\left[y\right] = \int_a^b F\left(x, y\left(x\right), y'\left(x\right)\right)dx$ *este continuă în raport cu norma* $\|y\|_X = \max_{x \in [a;b]}\left(|y(x)| + |y'(x)|\right)$.

Din cursul de analiză funcțională este cunoscută următoarea

Lema 1.2.1. *Fie* $\left(X;\|\cdot\|_X\right)$ *un spațiu liniar normat, iar* $K \subset X$ *o mulțime compactă. Atunci* *funcţionala* $I : K \to \mathbb{R}$ *continuă pe* K *este uniform continuă pe* K *, adică pentru orice* $\varepsilon > 0$ *dat,* $\exists \delta > 0$ *astfel că pentru* $y, \tilde{y} \in K$ *încât* $\|y - \tilde{y}\| < \delta$ *avem* $|I[y] - I[\tilde{y}]| < \varepsilon$.

În baza lemei 1.2.1 conchidem că funcţia F este uniform continuă pe orice mulţime compactă de forma $[a;b]\times([-c;c]\times[-c;c])$ $(c>0)$. Atunci pentru $y^* \in X$ fix, $y \in V_1(y^*)$ şi orice $x \in [a;b]$ avem:

$$|y(x)| \le |y(x)| + |y'(x)| \le \|y\|_X < 1 + \|y^*\|_X =: c_0,$$

$$|y'(x)| \le |y(x)| + |y'(x)| \le \|y\|_X < 1 + \|y^*\|_X = c_0.$$

Astfel pentru $c = c_0$ şi $\varepsilon > 0$ dat, există $\delta \in (0;1)$ încât pentru $\|y - y^*\|_X < \delta (<1)$ avem

$$\left|F(x, y(x), y'(x)) - F\left(x, y^*(x), y^{*\prime}(x)\right)\right| < \varepsilon,\ \forall x \in [a;b].$$

În baza acestei estimări uniforme obţinem:

$$\left|I[y] - I\left[y^*\right]\right| \le \int_a^b \left|F(x, y(x), y'(x)) - F\left(x, y^*(x), y^{*\prime}(x)\right)\right| dx \le \varepsilon(b-a)$$

când $\|y - y^*\|_X < \delta < 1$. Deci $I[y]$ este continuă în orice punct $y^* \in X$. ■

Remarca 1.2.2. Funcţionala continuă în sensul unei norme pe X poate să fie discontinuă în sensul altei norme, definite pe X.

Exemplul 1.2.5. *Să se arate că funcţionala* $I[y] = y(a)$*, unde* $y \in C[a;b]$*, este continuă în sensul normei* $\|y\|_1 := \max\limits_{x\in[a;b]} |y(x)|$*, dar este discontinuă în sensul normei* $\|y\|_2 := \int_a^b |y(x)| dx$.

Funcţionala $I[y]$ este liniară întrucât are loc relaţia

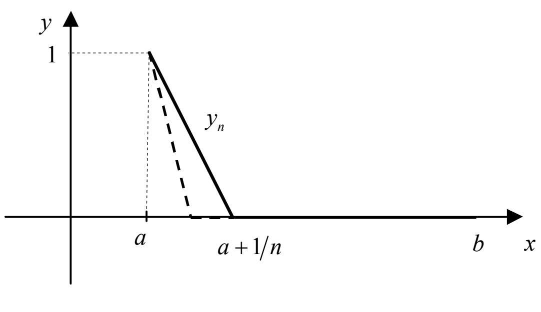
$$I[c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 I[y_1] + c_2 I[y_2],\ \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ y_1, y_2 \in C[a;b].$$

Funcţionala $I[y]$ este continuă în 0_X:

$$I[\delta y] \to 0 = I[0_X] \text{ când } \delta y \to 0_X.$$

Atunci, ţinând cont că $I[0_X] = 0$, funcţionala liniară $I[y]$ va fi continuă pe X în sensul normei $\|.\|_1$ [RS].

Dacă se utilizează norma $\|y\|_2$, funcţionala $I[y]$ rămâne liniară, însă nu este continuă peste tot. Într-adevăr, se poate indica un şir $\{y_n\}$, $y_n \in C[a;b]$ astfel încât $\|y_n\|_2 \to 0$ când $n \to \infty$, iar $I[y_n] = y_n(a) \ge 1$. De exemplu, funcţiile $y_n(x)$ cu graficele reprezentate în figura alăturată posedă proprietatea indicată mai sus, deoarece geometric se vede că pentru



$n>(b-a)^{-1}$ avem $\|y_n\|_2=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}\to 0$ când $n\to\infty$, pe când $y_n(a)=1$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Astfel $I[y]$ nu este continuă în 0_X. ■

Exemplul 1.2.6. *Fie funcționala* $I[y(x)]=y'(x_0)$ *definită pe* $X=C^1[a;b]$, x_0 *fiind un punct fixat din* $[a;b]$. *Să se arate că această funcțională este discontinuă în orice* $y^*(x)\in C^1[a;b]$ *în norma lui* $C[a;b]$.

Într-adevăr, fie $\varphi(x)\in C^1[a;b]$ astfel încât $\varphi'(x_0)=1$ şi $|\varphi(x)|<\delta, \forall x\in[a;b]\ (\delta>0)$. Funcția $y(x)=y^*(x)+\varphi(x)\in C^1[a;b]$ şi are derivata $y'(x_0)=y^{*\prime}(x_0)+1$. Deci $\left|I[y(x)]-I[y^*(x)]\right|=$ $=\left|y'(x_0)-y^{*\prime}(x_0)\right|=1$. Se poate simplu verifica că funcționala dată este continuă în orice $y^*(x)\in C^1[a;b]$ în norma lui $C^1[a;b]$. ■

În exemplele din secțiunile 1.1.1-1.1.9 se observă, că nu toate elementele spațiului X pe care este definită o funcțională $I[y]$ sunt luate în considerare în problema respectivă de extrem (de minim sau de maxim). De exemplu, dacă $F\in C\left([a;b]\times\mathbb{R}^2\right)$, atunci funcționala $I\left[y(x)\right]=\int_a^b F\left(x,y(x),y'(x)\right)dx$ este definită pentru $y(x)\in C^1[a;b]$, întrucât pentru astfel de funcții funcția $F\left(x,y(x),y'(x)\right)\in C[a;b]$, iar integrala de la aceasta este finită. Însă dacă $F\in C\left([a;b]\times\Omega\right)$, unde $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, atunci $I[y(x)]$ este definită doar pe o submulțime $D:=\left\{y(x)\in C^1[a;b] \,\middle|\, \left(x,y(x),y'(x)\right)\in[a;b]\times\Delta_2, \forall x\in[a;b]\right\}$. Aceste submulțimi D s-ar putea şi să nu fie liniare. De exemplu, mulțimea $D:=\left\{y(x)\in C[a;b] \,\middle|\, y(a)=0,\ y(b)=1\right\}$ nu formează un spațiu liniar, deoarece dacă $y\in D$, atunci $2y\notin D$.

Definiția 1.2.6. Se numesc elemente admisibile într-o problemă de extrem al unei funcționale, definite pe spațiul X, acele elemente ale lui X ce satisfac condițiile suplimentare impuse de problema respectivă.

1.2.2. Extreme globale şi locale ale funcţionalei

Să precizăm noțiunea de extrem al unei funcționale. Fie $I[y]$ o funcțională definită pe spațiul liniar normat X cu norma $\|\cdot\|$, iar D - mulțimea elementelor admisibile (prescurtat MEA) într-o problemă de extrem al funcționalei $I[y]$. Evident $D\subset X$.

Definiția 1.2.7. Se spune că funcționala $I[y]$ admite un minim global (absolut) pentru elementul $y^*\in D$, dacă pentru orice $y\in D$ are loc relația $I[y^*]\le I[y]$. Dacă pentru orice element $y\in D$ avem $I[y^*]\ge I[y]$, atunci se spune că $y^*\in D$ realizează un maxim global (absolut) al funcționalei $I[y]$ pe D. Un punct de minim sau de maxim global se numeşte punct de extrem global.

Ținând cont că inegalitatea $I[y]\le I\left[y^*\right]\ (\forall y\in D)$ implică $-I[y]\ge -I\left[y^*\right]\ (\forall y\in D)$, rezultă, că dacă y^* realizează un maxim al funcționalei $I[y]$, atunci y^* realizează un minim al funcționalei $-I[y]$. Dacă $y^*\in D$ realizează un minim (maxim) al funcționalei $I[y]$ pe D, atunci acesta realizează un minim (maxim) pe orice submulțime $D_1\subset D,\ y^*\in D_1$.

Exemplul 1.2.7. *Să se arate că funcția* $y^*(x)=x^3-x^2$ *realizează un minim* global *al funcționalei* $I[y(x)]=\int_0^1 y''^2(x)dx$ *pe MFA* $D:=\left\{y\in C^2[0;1]\,\middle|\,y(0)=y'(0)=y(1)=0,y'(1)=1\right\}$.

Conform definiției punctului de minim global este necesar să se arate că $I[y(x)]\ge I[y^*(x)],\ \forall y(x)\in D$. Simplu se verifică că $y^*(x)\in D$. Să considerăm o funcție arbitrară $y(x)\in D$. Aceasta se reprezintă sub forma $y(x)=y^*(x)+\delta y(x)$, unde $\delta y(x)\in C^2[0;1]$ (numită variație a funcției) satisface următoarele condiții la extremități:

$$\delta y(0)=\delta y'(0)=\delta y(1)=\delta y'(1)=0. \tag{1.2.1}$$

Ținând cont de reprezentarea pentru funcția $y(x)$ avem:

$$I[y^*(x)+\delta y(x)]-I[y^*(x)]=\int_0^1\left(y^{*''}(x)+\delta y''(x)\right)^2dx-\int_0^1\left(y^{*''}(x)\right)^2dx=2\int_0^1 y^{*''}(x)\delta y''(x)dx+\int_0^1\left(\delta y''(x)\right)^2dx.$$

Întrucât $y^{*''}(x)=6x-2$ rezultă că $\int_0^1 y^{*''}(x)\delta y''(x)dx=\int_0^1(6x-2)\delta y''(x)dx=6\int_0^1 x\delta y''(x)dx-2\int_0^1\delta y''(x)dx$. În baza relației (1.2.1) integrala $\int_0^1 x\delta y''(x)dx=x\delta y'(x)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1\delta y'(x)dx=\delta y'(1)-0-\delta y(1)+\delta y(0)=0$ precum şi $\int_0^1\delta y''(x)dx=\delta y'(x)\Big|_{x=0}^{x=1}=\delta y'(1)-\delta y'(0)=0$. Prin urmare $\int_0^1 y^{*''}(x)\delta y''(x)dx=0$, iar

$$I[y(x)]-I[y^*(x)]=\int_0^1\left(\delta y''(x)\right)^2dx.$$

Întrucât $\left(\delta y''(x)\right)^2\ge 0,\ \forall x\in[0;1]$, avem $\int_0^1\left(\delta y''(x)\right)^2dx\ge 0$ şi atunci $I[y(x)]\ge I[y^*(x)],\ \forall y(x)\in D$, adică funcția $y^*(x)=x^3-x^2$ realizează un minim absolut al funcționalei $I[y(x)]$ pe MFA D. ■

Ca şi pentru extremele unei funcții, deseori ne interesează, nu extremele absolute ale unei funcționale, ci extremele relative (locale) în care noțiunea de vecinătate joacă un rol important.

Definiția 1.2.8. Fie $y^*\in X$ şi $r>0$. Se numeşte vecinătate de rază r cu centrul în y^* mulțimea $V(y^*,r)=\left\{y\in X\,\middle|\,\left\|y-y^*\right\|\le r\right\}$.

Definiția 1.2.9. Mulțimea $A\subset X$ se numeşte deschisă dacă pentru orice $y\in A$ există

$r>0$ astfel încât $V(y,r)\subset A$.

Definiția 1.2.10. Vom spune că elementul admisibil $y^*\in D$ realizează un minim (maxim) local (sau relativ) al funcționalei $I[y]$ pe MEA, dacă există numărul $r>0$ astfel încât are loc inegalitatea $I[y^*]\le I[y]$ $(I[y^*]\ge I[y])$, pentru orice $y\in D\cap V(y^*,r):=\left\{y\in D \middle| \left\|y-y^*\right\|<r\right\}$. Punctelor de minim sau de maxim local le vom spune puncte de extrem local (relativ).

Remarca 1.2.3. Elementul $y^*\in D$ poate să fie un punct de extrem local în raport cu o normă, dar nu şi în raport cu alta.

Exemplul 1.2.8. *Pentru funcționala* $I[y(x)]=2y^3(0)-3y^2(0),\ y\in C[0;1]$ *să se arate că funcția* $y^*(x)\equiv 1$

a) *realizează un punct de minim local în raport cu norma* $\|y\|_1=\max\limits_{x\in[0;1]}|y(x)|$;

b) *nu realizează un punct de minim local în raport cu norma* $\|y\|_2=\int\limits_0^1|y(x)|dx$.

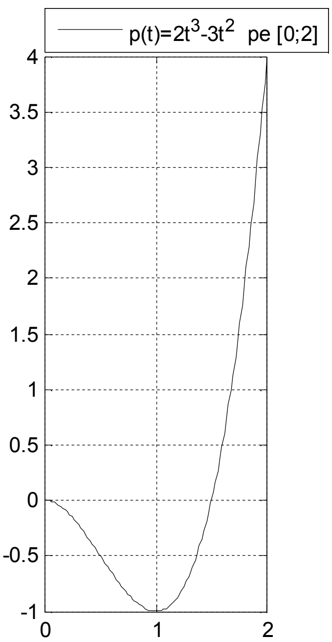


fig. 1.2.1

a) Fie $y\in V(y^*,1)=\left\{y\in C[0;1] \middle| \max\limits_{x\in[0;1]}|y(x)-1|\le 1\right\}$. Atunci are loc relația $0<y(x)<2$ $(x\in[0;1])$, în particular, $0<y(0)<2$. Întrucât pe $[0;2]$ polinomul $p(t)=2t^3-3t^2$ ia valoarea minimă (-1) în punctul $t=1$ (a se vedea figura 1.2.1), considerând $t:=y(0)$ obținem

$$I[y]\ge -1=I\left[y^*\right].$$

Astfel $y^*(x)\equiv 1$ realizează un punct de minim local în raport cu norma maximum.

b) Să considerăm funcția continuă

$$y_\varepsilon(x)=\begin{cases}-1+2x/\varepsilon, & 0\le x\le\varepsilon\\ 1, & \varepsilon<x\le 1\end{cases},$$

unde $\varepsilon>0$ dat. Întrucât are loc $\left\|y_\varepsilon-y^*\right\|_2=\int\limits_0^1\left|y_\varepsilon(x)-y^*(x)\right|dx=$ $=2\int\limits_0^\varepsilon|-1+x/\varepsilon|dx=-2\int\limits_0^\varepsilon(x/\varepsilon-1)dx=\varepsilon$, distanța dintre $y_\varepsilon(x)$ şi $y^*(x)\equiv 1$ în norma $\|\cdot\|_2$ poate fi făcută oricât de mică prin alegerea lui ε suficient de mic. Simultan avem $I\left[y_\varepsilon\right]=-5<-1=I\left[y^*\right]$ pentru orice $\varepsilon>0$. Astfel $y^*(x)\equiv 1$ nu realizează un punct de minim local în raport cu norma integrală. ■

În cazul în care domeniul de definiție X al funcționalei $I[y]$ este $C[a;b]$ sau $C^1[a;b]$, punctele de extrem relativ se pot clasifica şi în dependență de cât de largi sunt vecinătățile pe care acestea sunt definite.

Fie $\varepsilon>0$ un număr pozitiv arbitrar de mic.

Definiția 1.2.11. Se numeşte ε-vecinătate de ordinul zero (vecinătate tare de rază ε) a funcției $y^*(x)\in C[a;b]$ mulțimea

$$V_0(y^*(x),\varepsilon):=\left\{y(x)\in C[a;b]:\ \|y(x)-y^*(x)\|_{C[a;b]}=\max_{x\in[a;b]}\left|y^*(x)-y(x)\right|\le\varepsilon\right\}.$$

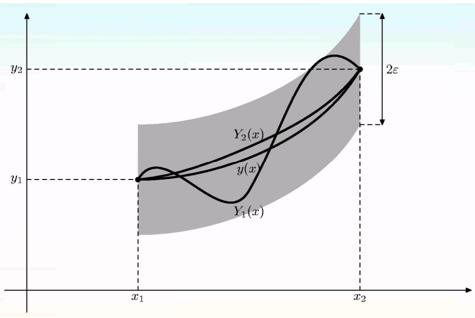
Aceasta înseamnă, că distanța de la curba $y^*(x)$ până la curbele $y(x)$ este mică.

Definiția 1.2.12. Se numeşte ε-vecinătate de ordinul întâi (vecinătate slabă de rază ε) a funcției $y^*(x)\in C^1[a;b]$ mulțimea

$$V_1(y^*(x),\varepsilon):=\left\{y(x)\in C^1[a;b]:\ \|y(x)-y^*(x)\|_{C^1[a;b]}=\max_{x\in[a;b]}\left|y^*(x)-y(x)\right|+\max_{x\in[a;b]}\left|y^{*\prime}(x)-y'(x)\right|\le\varepsilon\right\}.$$

Aceasta înseamnă, că sunt apropiate nu numai ordonatele curbelor $y^*(x)$ şi $y(x)$, dar şi valorile derivatelor lor.

Uşor se vede, că funcția $y(x)\in C^1[a;b]$ $(C^1[a;b]\subset C[a;b])$ ce aparține unei vecinătăți $V_1(y^*(x),\varepsilon)$ de ordinul întâi, aparține la fel şi vecinătății $V_0(y^*(x),\varepsilon)$ de ordinul zero, adică $V_1(y^*(x),\varepsilon)\subset V_0(y^*(x),\varepsilon)$.



În figura de mai jos curbele $Y_1(x)$ şi $Y_2(x)$ stau în vecinătate de ordinul zero a funcției $y(x)$, dar, totodată, numai $Y_2(x)$ stă într-o vecinătate de ordinul întâi.

Definiția 1.2.13. Vom spune că funcția admisibilă $y^*(x)\in D\subset C[a;b]$ realizează un minim (maxim) local tare al funcționalei $I[y]$ pe mulțimea funcțiilor admisibile (MFA) D dacă există $\varepsilon>0$ astfel încât are loc inegalitatea $I[y^*(x)]\le I[y(x)]$ $(I[y^*(x)]\ge I[y(x)])$ pentru orice $y(x)\in D\cap V_0(y^*(x),\varepsilon)$.

Definiția 1.2.14. Vom spune că funcția admisibilă $y^*(x)\in D\subset C^1[a;b]$ realizează un minim (maxim) local slab al funcționalei $I[y]$ pe MFA D dacă există $\varepsilon>0$ astfel încât are loc inegalitatea $I[y^*(x)]\le I[y(x)]$ $(I[y^*(x)]\ge I[y(x)])$ pentru orice $y(x)\in D\cap V_1(y^*(x),\varepsilon)$.

Exemplul 1.2.9. *Să se arate că funcția* $y^*(x)\equiv 0$ *realizează un minim local slab, dar nu tare, al funcționalei* $I[y(x)]=\int_0^{\pi} y^2(x)\left(3-y'^2(x)\right)dx$ *pe MFA*

$$D:=\left\{y\in C^1[0;\pi]\,\middle|\,y(0)=y(\pi)=0\right\}.$$

Conform definiției punctului de minim local slab este necesar să se arate că există $\varepsilon>0$ astfel încât $I[y(x)]\ge I[y^*(x)],\ \forall y(x)\in D\cap V_1(y^*(x);\varepsilon)$, unde $V_1(y^*(x);\varepsilon):=\left\{y(x)\in C^1[0;\pi]\,\middle|\ \|y(x)-y^*(x)\|_{C^1[0;\pi]}\le\varepsilon\right\}$.

Simplu se verifică că $y^*(x)\in D$ şi $I[y^*(x)]=0$. Fie $\varepsilon=1$. Atunci pentru fiecare curbă $y(x)$ din vecinătatea slabă de rază $\varepsilon=1$ a lui $y^*(x)\equiv 0$ se îndeplineşte condiția:

$$\|y(x)-y^*(x)\|_{C^1[0;\pi]} = \max_{x\in[0;\pi]}|y(x)| + \max_{x\in[0;\pi]}|y'(x)| \le 1,$$

de unde rezultă că $\max\limits_{x\in[0;\pi]}|y(x)|\le 1$ şi $\max\limits_{x\in[0;\pi]}|y'(x)|\le 1$. Astfel se satisfac condițiile $3-y'^2(x)>0$, $0\le y^2(x)\le 1$ $(x\in[0;\pi])$, ceea ce implică

$$I[y(x)]-I[y^*(x)]=\int_0^\pi y^2(x)\left(3-y'^2(x)\right)dx\ge 0,$$

adică $y^*(x)\equiv 0$ realizează un minim local slab al funcționalei $I[y(x)]$ pe MFA.

Să cercetăm dacă funcția $y^*(x)\equiv 0$ realizează un minim local tare al funcționalei. Întrucât pentru şirul de funcții $y_n(x):=\frac{1}{\sqrt{n}}\sin nx$ $(n\in\mathbb{N})$ are loc

$$\|y_n(x)-y^*(x)\|_{C[0;\pi]} := \left\|\frac{1}{\sqrt{n}}\sin nx\right\|_{C[0;\pi]} = \frac{1}{\sqrt{n}}\max_{x\in[0;\pi]}|\sin nx| \le \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,\ n\to\infty,$$

rezultă că pentru $\forall\varepsilon>0$ există un număr $n=n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât $\|y_{n_0}(x)-y^*(x)\|_{C[0;\pi]}\le\frac{1}{\sqrt{n_0}}\le\varepsilon$, adică $y_{n_0}(x)\in V_0(y^*(x);\varepsilon)$. Pe de altă parte avem:

$$I[y_n(x)]=\int_0^\pi y_n^2(x)\left(3-y_n'^2(x)\right)dx=\int_0^\pi\frac{1}{n}\left(\sin^2 nx\right)\left(3-n\cos^2 nx\right)dx=\frac{3}{n}\int_0^\pi\sin^2 nx\,dx-\int_0^\pi\left(\sin^2 nx\right)\left(\cos^2 nx\right)dx=I_1-I_2;$$

$$I_1=\frac{3}{n}\int_0^\pi\sin^2 nx\,dx=\frac{3}{2n}\int_0^\pi(1-\cos 2nx)dx=\frac{3}{2n}\left(x-\frac{1}{2n}\sin 2nx\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}=\frac{3\pi}{2n};$$

$$I_2=\int_0^\pi\left(\sin^2 nx\right)\left(\cos^2 nx\right)dx=\frac{1}{4}\int_0^\pi\sin^2 2nx\,dx=\frac{1}{8}\int_0^\pi(1-\cos 4nx)dx=\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4n}\sin 4nx\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi}=\frac{\pi}{8};$$

$$I[y_n(x)]=\frac{3\pi}{2n}-\frac{\pi}{8}<0 \text{ pentru } n\ge n_1=13.$$

Pentru fiecare $\varepsilon>0$ şi un $n\ge\max(n_0;n_1)$ vom avea $y_n(x)\in V_0(y^*(x);\varepsilon)$ şi $I[y_n(x)]-I[y^*(x)]<0$, adică $y^*(x)\equiv 0$ nu realizează un minim relativ tare al funcționalei $I[y]$ pe MFA. ■

Evident, orice extrem global al unei funcționale este şi extrem local. De asemenea, dacă $X=C^1[a;b]$, atunci funcția ce realizează un extrem local tare al funcționalei $I[y]$ pe MFA, îndeplineşte şi condițiile unui extrem local slab. Reciproca, în general vorbind, nu este adevărată.

Definițiile date mai sus se extind în mod natural pentru cazul funcționalelor ce depind de o funcție de mai multe variabile, definită pe un domeniu şi de derivatele parțiale ale acesteia, cât şi pentru cazul funcționalelor ce depind de mai multe funcții de o variabilă, definite pe un interval şi de derivatele acestora.

1.2.3. Lemele fundamentale ale calculului variațional

Pentru a stabili condiții necesare de extrem al unei funcționale vom utiliza rezultate auxiliare cunoscute ca leme fundamentale ale calculului variațional. Aceste leme furnizează condiții de tip integral la îndeplinirea cărora funcția dată se anulează.

Pe intervalul $[a;b]\subset\mathbb{R}$ să considerăm mulțimea de funcții

$$H_1 := \left\{\eta:[a;b]\to\mathbb{R} \middle| \eta(x)\in C^1[a;b],\, \eta(a)=\eta(b)=0\right\}. \tag{1.2.2}$$

Lema 1.2.2. *(du Bois-Reymond) Dacă $g(x)\in C[a;b]$ satisface condiția*

$$\int_a^b g(x)\eta'(x)dx = 0,\ \forall\,\eta(x)\in H_1, \tag{1.2.3}$$

atunci $g(x)\equiv const$ pe $[a;b]$.

Demonstrație. Considerăm funcția $\eta:[a;b]\to\mathbb{R}$ definită în modul următor:

$$\eta(x)=\int_a^x (g(t)-c)dt\,.$$

Aici c este o constantă care se determină din condiția $\eta(b)=0$, deci $c=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b g(t)dt$.

Funcția construită $\eta(x)$ satisface condițiile stipulate în enunțul lemei, adică $\eta(x)\in H_1$. Ținând cont că $\eta'(x)=g(x)-c$ (conform teoremei fundamentale a calculului integral – a se vedea [16, p.246]), în baza relației (1.2.3) avem

$$\int_a^b \left(g(x)-c\right)^2 dx = \int_a^b \left(g(x)-c\right)\eta'(x)dx = \int_a^b g(x)\eta'(x)dx - c\eta(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = 0\,.$$

Atunci, întrucât $\left(g(x)-c\right)^2\ge 0,\ \forall x\in[a;b]$ şi $g(x)\in C[a;b]$, rezultă că $g(x)=c,\ \forall x\in[a;b]$. ■

Fie $C^0[a;b]\equiv C[a;b]$. Următoarea lemă reprezintă o generalizare a lemei lui du Bois-Reymond.

Lema 1.2.3. *Fie $g(x)\in C[a;b]$ cu proprietatea că pentru un $m\in\mathbb{N}$ şi orice $\eta(x)\in H_m := \left\{\eta(x)\in C^m[a;b] \middle| \eta^{(k)}(a)=\eta^{(k)}(b)=0,\ k=\overline{0,m-1}\right\}$ se satisface condiția*

$$\int_a^b g(x)\eta^{(m)}(x)dx = 0\,. \tag{1.2.4}$$

Atunci $g(x)$ $(x\in[a;b])$ este un polinom de grad mai mic sau egal cu $m-1$.

Demonstrație. Fără a pierde din generalitate se poate considera că $a=0$ (aceasta se poate obține printr-o substituție). Funcția

$$G(x) := \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{m-1}} h(t)dt\,,$$

este de clasă $C^m[0;b]$ şi, întrucât la derivarea succesivă este eliminată câte o integrală, avem $G^{(m)}(x)=g(x)$ şi $G^{(j)}(0)=0,\ j=\overline{0,m-1}$.

Dacă $q_{m-1}(x)$ este un polinom de grad cel mult $m-1$, atunci polinomul $P(x):=x^m q_{m-1}(x)$ se anulează în $x=0$ împreună cu derivatele $P^{(j)}(x)$ $(j<m)$. Funcția

$p_{m-1}(x):=P^{(m)}(x)$ este la fel un polinom de grad mai mic sau egal cu $m-1$. Pentru funcția $\eta(x):=G(x)-P(x)$ avem $\eta^{(m)}(x)=g(x)-p_{m-1}(x)$. Se poate demonstra că poate fi selectat polinomul $q_{m-1}(x)$ astfel încât să se satisfacă condițiile $\eta^{(k)}(b)=0,\ k=\overline{0,m-1}$. Considerând că $q_{m-1}(x)$ a fost selectat în modul indicat şi am obținut respectiva funcție $\eta(x)\in H_m$, utilizând integrarea prin părți avem:

$$\int_0^b p_{m-1}(x)\eta^{(m)}(x)dx=-\int_0^b p'_{m-1}(x)\eta^{(m-1)}(x)dx=...=(-1)^m\int_0^b p_{m-1}^{(m)}(x)\eta(x)dx=0\,.$$

Atunci în baza relației (1.2.4) conchidem:

$$0\le\int_0^b\left(g(x)-p_{m-1}(x)\right)^2dx=\int_0^b\left(g(x)-p_{m-1}(x)\right)\eta^{(m)}(x)dx=\int_0^b g(x)\eta^{(m)}(x)dx=0\,,$$

de unde rezultă că $g(x)=p_{m-1}(x),\ \forall x\in[0;b]$. ■

Lema 1.2.4. *Dacă* $f(x),g(x)\in C[a;b]$ *satisfac condiția* $\int_a^b\left(f(x)\eta(x)+g(x)\eta'(x)\right)dx=0$ *pentru* $\forall\,\eta(x)\in H_1$ *ce verifică* $\eta(a)=\eta(b)=0$*, atunci* $g(x)\in C^1[a;b]$ *şi* $g'(x)=f(x),\ \forall x\in[a;b]$.

Demonstrație. Considerăm funcția $\gamma:[a;b]\to\mathbb{R}$ definită în modul următor:

$$\gamma(x)=\int_a^x f(t)dt\,.$$

Conform teoremei fundamentale a calculului integral funcția $\gamma(x)\in C^1[a;b]$ şi $\gamma'(x)=f(x),\ \forall x\in[a;b]$. Conform ipotezei, pentru orice funcție $\eta(x)\in H_1$ are loc $\int_a^b\left(\gamma'(x)\eta(x)+g(x)\eta'(x)\right)dx=0$. Integrând prin părți obținem $\int_a^b\gamma'(x)\eta(x)dx=\gamma(x)\eta(x)\Big|_{x=a}^{x=b}-\int_a^b\gamma(x)\eta'(x)dx=$ $=-\int_a^b\gamma(x)\eta'(x)dx$, de unde avem $\int_a^b g(x)\eta'(x)dx=-\int_a^b\gamma'(x)\eta(x)dx=\int_a^b\gamma(x)\eta'(x)dx$. În fine obținem $\int_a^b\left(g(x)-\gamma(x)\right)\eta'(x)dx=0,\ \forall\,\eta(x)\in H$. În baza lemei 1.2.3 conchidem, că funcția $g(x)-\gamma(x)$ este constantă pe $[a;b]$, deci $g(x)\in C^1[a;b]$ şi $g'(x)=\gamma'(x)=f(x),\ \forall x\in[a;b]$. ■

În cazul în care în lema 1.2.4 avem $g(x)\equiv 0$ pe $[a;b]$ obținem

Corolarul 1.2.1. *Dacă* $f(x)\in C[a;b]$ *satisface condiția*

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx=0,\ \forall\,\eta(x)\in H_1\,,$$

atunci $f(x)\equiv 0$ *pe* $[a;b]$.

Rezultatul corolarului 1.2.1 admite următoarea generalizare:

Lema 1.2.5. *(Lagrange) Dacă* $f(x)\in C[a;b]$ *satisface condiția*

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx=0,\ \forall\,\eta(x)\in H_m:=\left\{\eta(x)\in C^m[a;b]\,\middle|\,\eta^{(k)}(a)=\eta^{(k)}(b)=0,\ k=\overline{0,m}\right\}\ \left(m\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right),\qquad(1.2.5)$$

atunci $f(x) \equiv 0$ *pe* $[a;b]$.

Demonstrație. Presupunem, prin absurd, că $f(x)$ nu este identic nulă pe $(a;b)$, deci există $c \in (a;b)$ astfel încât $f(c) \neq 0$. Fără a reduce din generalitate, se poate considera că $f(c) > 0$. În caz contrar înmulțim la -1 relația (1.2.5) şi considerăm în locul lui $f(x)$ funcția $-f(x)$ (vom avea $-f(c) > 0$). Funcția $f(x)$ fiind continuă în punctul c, este continuă şi într-o vecinătate a acestuia, adică pentru $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ suficient de mic, astfel încât pentru $\forall x \in J := [c-\delta; c+\delta] \subseteq [a;b]$ avem $|f(x) - f(c)| \le \varepsilon$. Altfel spus, pentru $\forall x \in J$ au loc inegalitățile $f(c) - \varepsilon \le f(x) \le f(c) + \varepsilon$. În particular, pentru $\varepsilon = 0.5 f(c)$ rezultă, că există un interval corespunzător $J = [c-\delta; c+\delta]$ astfel încât pentru $\forall x \in J$ avem

$$f(x) \ge 0.5 f(c) > 0. \tag{1.2.6}$$

Ținând cont de numărul $\delta > 0$ menționat, considerăm funcția $\eta : [a;b] \to \mathbb{R}$, definită astfel:

$$\eta(x) = \begin{cases} (x-(c-\delta))^{m+1}((c+\delta)-x)^{m+1}, & dacă\ x \in J \\ 0, & dacă\ x \notin J \end{cases}.$$

Simplu se verifică că funcția $\eta(x) \in H_m$ şi este nenegativă pe $[a;b]$. Utilizând relația (1.2.6) şi teorema de medie [16, p. 241]$\left(\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} h(x)dx = (\alpha_2 - \alpha_1) h(\xi),\ \xi \in (\alpha_1; \alpha_2) \right)$ obținem:

$$\int\limits_a^b f(x)\eta(x)dx = \int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\eta(x)dx \ge \frac{1}{2} f(c) \int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} \eta(x)dx = \frac{1}{2} f(c)\eta(\xi)\big((c+\delta)-(c-\delta)\big) > 0 \quad (\xi \in (c-\delta; c+\delta)),$$

ceea ce contrazice relația (1.2.5).

Deoarece $f(x) = 0, \forall x \in (a;b)$, iar funcția $f(x) \in C[a;b]$, obținem $f(x) = 0, \forall x \in [a;b]$. ■

Este evidentă extinderea rezultatului lemei 1.2.5 pentru cazul funcțiilor de mai multe variabile (integralelor multiple). Formulăm varianta 2-dimensională a acesteia. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un compact (domeniu mărginit şi închis), iar curba netedă $\partial\Omega$ - frontiera acestuia. Are loc

Lema 1.2.6. *Fie* $G(x,y) \in C(\Omega)$ *cu proprietatea că pentru orice* $\eta(x,y) \in C^1(\Omega)$ *astfel încât* $\eta(x,y)\big|_{\partial\Omega} = 0$, *satisface condiția*

$$\iint\limits_{\Omega} G(x,y)\eta(x,y)dxdy = 0.$$

Atunci $G(x,y) = 0, \forall (x,y) \in \Omega$.

Demonstrația, prin esența ei, nu se deosebeşte de cea pentru lema 1.2.5.

1.2.4. Diferențiale de ordinul I şi II ale funcționalei

Şi în analiza clasică şi în CV clasic metoda esențială de studiere a extremelor este metoda variațiilor, conform căreia studiul extremelor se realizează prin atribuirea de mici variații argumentului. În legătură cu această metodă intervin noțiunile de diferențiale ale funcționalei.

Fie $(X,\|\cdot\|)$ un spațiu liniar normat, $I: X \to \mathbb{R}$ o funcțională, iar $D \subset X$ mulțimea elementelor admisibile într-o problemă de extrem al funcționalei $\underset{y\in D}{extr}\, I[y]$. Dacă $y, y^* \in D$, atunci elementul $\delta y := y - y^* \in X$ îl vom numi *variație a argumentului funcționalei* $I[y]$ atunci când se trece de la elementul y^* la y. În cazul în care elementul $y^* \in D$ este fix, pentru orice alt element $y \in D$ există $\delta y \in X$ astfel încât $y = y^* + \delta y$. Simultan, fiecare element $y \in D$ se poate reprezenta şi sub forma $y = y^* + \alpha\delta y$ în care $\alpha \in \mathbb{R}, \delta y \in X$.

I. Diferenţiala Gâteaux

Diferențiala Gâteaux într-un spațiu liniar normat reprezintă o generalizare a conceptului de derivată direcțională în $\mathbb{R}^n$ din cursul de calcul diferențial.

Definiția 1.2.15. Vom spune că funcționala $I[y]$ este diferențiabilă Gâteaux (prescurtat G-diferențiabilă) în punctul $y^* \in D$ dacă există

$$\delta I[y^*;\delta y] := \frac{d}{d\alpha} I[y^* + \alpha\delta y]\bigg|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{I[y^* + \alpha\delta y] - I[y^*]}{\alpha}, \tag{1.2.7}$$

pentru orice $\delta y \in X$. Funcționala $\delta I[y^*;\delta y]$ se numeşte diferențială Gâteaux [22] (prescurtat G-diferențială) a funcționalei $I[y]$ în punctul y^*. În unele surse G-diferențiala mai este numită şi variație de ordinul I a funcționalei $I[y]$ în $y^* \in D$ [5],[10].

Din definiția 1.2.15 rezultă că în fiecare punct $y \in D$ G-diferențiala defineşte funcționala $\delta I[y;\delta y]: X \to \mathbb{R}$ omogenă în raport cu variabila δy, adică pentru $\forall c \in \mathbb{R}$ avem $\delta I[y; c\delta y] = c\delta I[y;\delta y]$. Într-adevăr, avem :

$$\delta I[y^*;c\delta y] = \frac{\partial}{\partial\alpha} I\left[y^* + \alpha c\delta y\right]\bigg|_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial(c\alpha)} I\left[y^* + c\alpha\delta y\right]\bigg|_{c\alpha=0} \cdot \frac{\partial(c\alpha)}{\partial\alpha} = c\frac{\partial}{\partial(c\alpha)} I\left[y^* + c\alpha\delta y\right]\bigg|_{c\alpha=0} = c\delta I[y^*;\delta y].$$

Însă $\delta I[y;\delta y]$ poate să nu fie funcțională aditivă (prin urmare, nici liniară) în raport cu δy şi nici continuă.

Exemplul 1.2.10. *Să se arate că funcționala*

$$I\left[y(x)\right] = \int_{-1}^{1} \sqrt[3]{y^3(x) + y'^3(x)}\,dx,$$

unde $y(x) \in D := \left\{ y(x) \in C^1[-1;1] \,\middle|\, y(-1) = 0,\ y(1) = 0 \right\}$, *este G-diferențiabilă în punctul* $y^*(x) \equiv 0$, *iar G-diferențiala* $\delta I\left[0;\delta y(x)\right]$ *este neliniară în raport cu* $\delta y(x)$.

Deoarece avem $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{I\left[y^*+\alpha\delta y\right]-I\left[y^*\right]}{\alpha}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha\int\limits_{-1}^{1}\sqrt[3]{\delta y^3(x)+\delta y'^3(x)}dx}{\alpha}=\int\limits_0^1\sqrt[3]{\delta y^3(x)+\delta y'^3(x)}dx$, $I\left[y(x)\right]$ este G-diferențiabilă în punctul $y^*(x)\equiv 0$, iar G-diferențiala este $\delta I\left[0;\delta y(x)\right]=$ $=\int\limits_0^1\sqrt[3]{\delta y^3(x)+\delta y'^3(x)}dx$. Ultima relație confirmă faptul că $\delta I\left[0;\delta y(x)\right]$ este funcțională neliniară în raport cu $\delta y(x)$. ■

Se ştie că orice funcțională liniară, definită pe un spațiu liniar normat X finit dimensional, este şi continuă pe X. Însă atunci când spațiul X este infinit dimensional o funcțională liniară pe X poate să nu fie continuă pe acesta [23, p.26]. În următoarea teoremă sunt formulate condiții suficiente de liniaritate şi continuitate a G-diferențialei [26, p.44]:

Teorema 1.2.1. *Fie* $\left(X,\|\cdot\|\right)$ *- spațiu liniar normat,* $y^*\in X$, $V(y^*)\subset X$ *- o vecinătate a punctului* y^* *şi funcționala* $I:V(y^*)\to\mathbb{R}$*. Dacă în fiecare punct* $y\in V(y^*)$ *există G-diferențiala* $\delta I[y;\delta y]$ *a funcționalei* $I[y]$*, continuă în prima variabilă în punctul* y^* *pentru fiecare* $\delta y\in X$ *fix, iar* $\delta I[y^*;\delta y]$ *este continuă în a doua variabilă în punctul* $\delta y=0_X$ $\left(\|0_X\|=0\right)$*, atunci funcționala* $\delta I[y^*;\delta y]$ *este liniară şi continuă în raport cu* δy*.*

Demonstrație. Întrucât $\delta I[y^*;\delta y]$ este continuă în punctul $\delta y=0_X$, există numerele $m>0$ şi $M>0$ astfel încât pentru $\|\delta y\|\le m$ vom avea $\left|\delta I[y^*;\delta y]\right|\le M$. G-diferențiala $\delta I[y;\delta y]$ fiind omogenă în raport cu δy, pentru $\delta y\in X$ arbitrar rezultă, că $\left|\delta I[y^*;\delta y]\right|=$ $=\left|\dfrac{1}{m}\|\delta y\|\cdot\delta I\left[y^*;m\delta y/\|\delta y\|\right]\right|\le\dfrac{M}{m}\|\delta y\|$, adică $\delta I[y^*;\delta y]$ este funcțională mărginită de normă M/m.

Pentru a verifica aditivitatea lui $\delta I[y^*;\delta y]$ în raport cu δy vom utiliza formula lui Lagrange: $I[y+\delta y]-I[y]=\delta I[y+\tau\delta y;\delta y]$ $(0<\tau<1)$ (a se vedea Anexa). Fie δy_1 şi δy_2 elemente din X de normă $\|\delta y_1\|=\|\delta y_2\|=1$, iar ε un număr pozitiv arbitrar. Definiția G-diferențialei $\delta I[y^*;\delta y]$ (aceasta există conform ipotezei teoremei) implică existența numărului $v_1=v(\varepsilon)>0$ astfel încât pentru $|\alpha|<v_1$ să avem $y^*+\alpha\delta y_1\in V(y^*)$, $y^*+\alpha\delta y_1+\alpha\delta y_2\in V(y^*)$ şi

$$\begin{gathered}\left|\delta I[y^*;\delta y_1]-\left(I[y^*+\alpha\delta y_1]-I[y^*]\right)/\alpha\right|<\varepsilon/4,\\ \left|\delta I[y^*;\delta y_2]-\left(I[y^*+\alpha\delta y_2]-I[y^*]\right)/\alpha\right|<\varepsilon/4,\\ \left|\delta I\left[y^*;\delta y_1+\delta y_2\right]-\left(I\left[y^*+\alpha\left(\delta y_1+\delta y_2\right)\right]-I\left[y^*\right]\right)/\alpha\right|<\varepsilon/4.\end{gathered}\tag{1.2.8}$$

Întrucât conform ipotezei $\delta I[y;\delta y_1]$ este continuă în prima variabilă în punctul y^*, pentru o alegere reuşită a numărului $\nu_2>0$ când $|\alpha|<\nu_2$ vom avea $y^*+\alpha\delta y_1\in V(y^*),\ y^*+\alpha\delta y_1+\alpha\delta y_2\in V(y^*)$ şi:

$$\begin{gathered}\left|\delta I\left[y^*+\alpha\delta y_2+\tau_1\alpha\delta y_1;\delta y_1\right]-\delta I\left[y^*;\delta y_1\right]\right|<\varepsilon/8\ \ (0<\tau_1<1),\\ \left|\delta I\left[y^*+\tau_2\alpha\delta y_1;\delta y_1\right]-\delta I\left[y^*;\delta y_1\right]\right|<\varepsilon/8\ \ (0<\tau_2<1).\end{gathered} \tag{1.2.9}$$

În baza relației (1.2.9) şi a formulei lui Lagrange deducem:

$$\left|\frac{1}{\alpha}\left(I\left[y^*+\alpha\delta y_1+\alpha\delta y_2\right]-I\left[y^*+\alpha\delta y_2\right]+I\left[y^*\right]-I\left[y^*+\alpha\delta y_1\right]\right)\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{\alpha}\left(\delta I\left[y^*+\alpha\delta y_2+\tau_1\alpha\delta y_1;\alpha\delta y_1\right]-\delta I\left[y^*+\tau_2\alpha\delta y_1;\alpha\delta y_1\right]\right)\right|\le\left|\delta I\left[y^*+\alpha\delta y_2+\tau_1\alpha\delta y_1;\delta y_1\right]-\delta I\left[y^*;\delta y_1\right]\right|+$$

$$+\left|\delta I\left[y^*+\tau_2\alpha\delta y_1;\delta y_1\right]-\delta I\left[y^*;\delta y_1\right]\right|<\varepsilon/4\,.$$

Fie $\nu=\min\{\nu_1,\nu_2\}$. Atunci, în baza formulei (1.2.8), pentru $|\alpha|<\nu$ vom avea:

$$\left|\delta I\left[y^*;\delta y_1+\delta y_2\right]-\delta I\left[y^*;\delta y_1\right]-\delta I\left[y^*;\delta y_2\right]\right|\le\left|\delta I\left[y^*;\delta y_1+\delta y_2\right]-\left(I\left[y^*+\alpha\delta y_1+\alpha\delta y_2\right]-I\left[y^*\right]\right)/\alpha\right|+$$

$$+\left|\delta I\left[y^*;\delta y_1\right]-\left(I\left[y^*+\alpha\delta y_1\right]-I\left[y^*\right]\right)/\alpha\right|+\left|\delta I\left[y^*;\delta y_2\right]-\left(I\left[y^*+\alpha\delta y_2\right]-I\left[y^*\right]\right)/\alpha\right|+$$

$$+\left|\left(I\left[y^*+\alpha\delta y_1+\alpha\delta y_2\right]+I\left[y^*\right]-I\left[y^*+\alpha\delta y_1\right]-I\left[y^*+\alpha\delta y_2\right]\right)/\alpha\right|<\varepsilon\,.$$

Întrucât $\varepsilon>0$ a fost ales arbitrar, obținem:

$$\delta I\left[y^*;\delta y_1+\delta y_2\right]=\delta I\left[y^*;\delta y_1\right]+\delta I\left[y^*;\delta y_2\right],$$

adică se verifică proprietatea de aditivitate a funcționalei $\delta I[y^*;\delta y]$ în raport cu variabila δy. Cum aceasta este şi omogenă în δy, rezultă că $\delta I[y^*;\delta y]$ este liniară în δy. Totodată, funcționala liniară şi mărginită este continuă [23, p.26]. ■

Definiția 1.2.16. Vom spune că funcționala $I[y]$ este de două ori G-diferențiabilă în punctul $y^*\in D$ dacă există

$$\delta^2 I[y^*;\delta y]:=\frac{d^2}{d\alpha^2}I[y^*+\alpha\delta y]\bigg|_{\alpha=0},$$

pentru orice $\delta y\in X$. Funcționala $\delta^2 I[y^*;\delta y]$ se numeşte G-diferențială de ordinul doi a funcționalei $I[y]$ în punctul $y^*\in D$. În unele surse $\delta^2 I[y^*;\delta y]$ mai este numită şi variație de ordinul II a funcționalei $I[y]$ în $y^*\in D$ [5],[10].

G-diferențiala de ordinul doi $\delta^2 I[y^*;\delta y]$ este o funcțională omogenă de ordinul doi, adică $\delta^2 I\left[y^*(x);\alpha\delta y(x)\right]=\alpha^2\delta^2 I\left[y^*(x);\delta y(x)\right]$

Să considerăm dreapta $d: y=y^*+\alpha\delta y$, unde $y^*\in D,\alpha\in\mathbb{R},\delta y$ - un element fix din X. Pentru $\alpha=0$ avem $y=y^*$. În cazul în care funcția scalară $\varphi(\alpha):=I[y^*+\alpha\delta y]$ este analitică pe domeniul său de definiție, aceasta admite dezvoltare în serie Taylor în vecinătatea punctului $\alpha=0$ în raport cu puterile lui α, iar pentru creșterea funcționalei obținem următoarea reprezentare:

$$\Delta I = I[y^*+\alpha\delta y]-I[y^*]=\alpha\delta I+\frac{\alpha^2}{2!}\delta^2 I+\frac{\alpha^3}{3!}\delta^3 I+\ldots,$$

în care mărimea $\delta I=\left.\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=\left.\frac{dI[y^*+\alpha\delta y]}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$ este G-diferențiala funcționalei $I[y]$ în y^*, $\delta^2 I=\left.\frac{d^2\varphi(\alpha)}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0}=\left.\frac{d^2I[y^*+\alpha\delta y]}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0}$ - G-diferențiala de ordinul II, $\delta^3 I$ - G-diferențiala de ordinul III, etc.

Exemplul 1.2.11. *Fie* $\Omega:=[a;b]\times\Delta_2$ $\left([a;b]\subset\mathbb{R},\Delta_2\subset\mathbb{R}^2\right)$ *o mulțime deschisă, iar* $F:\Omega\to\mathbb{R}$ *o funcție de clasă* C^2 *(în* Ω *funcția* $F=F(x,y,z)$ *are derivate parțiale de ordinul întâi* F_x,F_y,F_z *și de ordinul doi* $F_{xx},F_{xy},F_{xz},F_{yx},F_{yy},F_{yz},F_{zx},F_{zy},F_{zz}$ *continue în raport cu cele trei variabile). Să se arate că funcționala*

$$I[y(x)]=\int_a^b F\left(x,y(x),y'(x)\right)dx,$$

definită pe mulțimea funcțiilor admisibile

$$D:=\left\{y(x)\in C^1[a;b]\,\middle\|\,\left(x,y(x),y'(x)\right)\in\Omega,\ \forall x\in[a;b],\ y(a)=y_a,y(b)=y_b,y_a,y_b\in\mathbb{R}\right\},$$

este de două ori G-diferențiabilă în orice punct $y^*(x)\in D$ *și să se calculeze variațiile de ordinul I și II ale acesteia.*

Fie $y^*(x)\in D$ o funcție admisibilă. Funcția

$$y(x):=y^*(x)+\alpha\delta y(x)\ \ \left(\alpha\in V(0;\varepsilon)\subset\mathbb{R},\ \delta y(x)\in C^1[a;b]\ \text{fixă}\right) \tag{1.2.10}$$

va aparține mulțimii D dacă și numai dacă $\delta y(x)\in H_1$ (mulțimea H_1 este definită prin relația (1.2.2)).

Să considerăm funcția $\varphi:J:=\left[-\varepsilon/\|\delta y(x)\|_{C^1[a;b]};\varepsilon/\|\delta y(x)\|_{C^1[a;b]}\right]\to\mathbb{R}$, definită prin relația

$$\varphi(\alpha):=I[y(x,\alpha)]=\int_a^b F\left(x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha)(x)\right)dx,$$

unde $y(x,\alpha)$ este de forma (1.2.10), $\delta y(x)\in H_1$ este fixă, iar parametrul numeric α aparține intervalului indicat, ceea ce asigură că $y(x,\alpha):=y^*(x)+\alpha\delta y(x)$ aparține MFA D. Întrucât integrandul $F\in C^1(\Omega)$ (de fapt, $F\in C^2(\Omega)$) funcția $\varphi(\alpha)$ este derivabilă (se poate deriva în raport cu α sub semnul integralei), iar funcționala $I\left[y(x)\right]$ este G-diferențiabilă în orice punct $y^*(x)\in D$.

În continuare utilizăm regula de derivare a integralei ce depinde de parametru, precum și regula de derivare a funcției compuse de câteva variabile. Amintim că pentru integrala $\mathcal{I}(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)dx$, în care $f(x,\alpha)$ este o funcție de clasă C^1, are loc relația [16, p.341]

$$\mathcal{I}'(\alpha)=\int_a^b f_\alpha dx\,. \tag{1.2.11}$$

Dacă funcția $u=f(x,\alpha)$ este definită ca compusă

$$\begin{cases} u=F(x,y,z) \\ y=y(x,\alpha) \\ z=y'(x,\alpha) \end{cases},$$

unde toate funcțiile sunt netede, atunci [ ]

$$u_\alpha=F_\alpha=F_y\cdot y_\alpha+F_z\cdot y'_\alpha\,. \tag{1.2.12}$$

Utilizând formulele (1.2.11), (1.2.12) şi egalitățile $y_\alpha=\delta y,\ y'_\alpha=\delta y'$ (a se vedea relația (1.2.10)), obținem:

$$\varphi'(\alpha)=\int_a^b F_\alpha\left(x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha)\right)dx=\int_a^b\left(F_y y_\alpha+F_{y'}y'_\alpha\right)dx=$$

$$=\int_a^b\Big(F_y\left(x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha)\right)\delta y(x)+F_{y'}\left(x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha)\right)\delta y'(x)\Big)dx\,. \tag{1.2.13}$$

Atunci variația de ordinul întâi $\delta I\left[y^*(x);\delta y(x)\right]$ poate fi scrisă astfel:

$$\delta I\left[y^*(x);\delta y(x)\right]=\varphi'(0)=\int_a^b\left\{F_y\left(x,y^*(x),y^{*\prime}(x)\right)\delta y(x)+F_{y'}\left(x,y^*(x),y^{*\prime}(x)\right)\delta y'(x)\right\}dx\,. \tag{1.2.14}$$

Relația (1.2.14) arată că în cazul dat G-diferențiala $\delta I\left[y^*(x);\delta y(x)\right]$ este o funcțională liniară şi continuă în raport cu funcția $\delta y(x)$.

Întrucât integrandul $F(x,y(x),y'(x))$ este o funcție de clasă $C^2(\Omega)$, funcția $\varphi(\alpha)$ este de două ori derivabilă în punctul $\alpha=0$, iar funcționala $I\left[y(x)\right]$ este de două ori G-diferențiabilă în orice punct $y^*(x)\in D$. Să calculăm variația de ordinul doi a funcționalei $I[y(x)]$. Pentru aceasta vom calcula $\varphi''(0)$. Ținând cont de (1.2.13), de relațiile

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\int_a^b F_y\delta y dx\right)=\int_a^b\frac{d}{d\alpha}\left(F_y\delta y\right)dx=\int_a^b\left(F_{yy}(\delta y)^2+F_{y'y}\delta y\delta y'\right)dx\,,$$

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\int_a^b F_{y'}\delta y' dx\right)=\int_a^b\frac{d}{d\alpha}\left(F_{y'}\delta y'\right)dx=\int_a^b\left(F_{yy'}\delta y'\delta y+F_{y'y'}(\delta y')^2\right)dx\,,$$

şi de faptul că $F\in C^2$ (în acest caz coincid derivatele parțiale mixte), obținem

$$\varphi''(\alpha)=\int_a^b\left(F_{yy}(\delta y)^2+2F_{yy'}\delta y\delta y'+F_{y'y'}(\delta y')^2\right)dx\,.$$

În aceste relații derivatele integrandului F sunt funcții de variabilele

$\left(x, y^*(x)+\alpha\delta y(x), y^{*\prime}(x)+\alpha\delta y'(x)\right)$. Înlocuim valoarea $\alpha=0$ şi obținem formula pentru variația de ordinul doi:

$$\begin{gathered}\delta^2 I[y^*(x);\delta y(x)]=\varphi''(0)=\int_a^b\Big(F_{yy}\left(x,y^*(x),y^{*\prime}(x)\right)\left(\delta y(x)\right)^2+\\ +2F_{yy'}\left(x,y^*(x),y^{*\prime}(x)\right)\delta y(x)\delta y'(x)+F_{y'y'}\left(x,y^*(x),y^{*\prime}(x)\right)\left(\delta y'(x)\right)^2\Big)dx,\end{gathered} \tag{1.2.15}$$

care reprezintă o funcțională pătratică (a se vedea Anexa).

II. Diferenţiala Fréchet

Vom aminti că în spațiul normat $\left(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}\right)$ funcția $f:V\left(y^*\right)\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ este diferențiabilă în $y^*\in\mathbb{R}^n$ dacă are loc reprezentarea

$$f(y)=f(y^*)+l\left(y-y^*\right)+\left\|y-y^*\right\|\varsigma\left(y-y^*\right),$$

unde $\varsigma\left(y-y^*\right)$ satisface $\lim\limits_{y-y^*\to 0_{\mathbb{R}^n}}\varsigma\left(y-y^*\right)=0$, iar $l:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ este o funcție liniară, continuă, ce satisface $l(v)=\nabla f\left(y^*\right)v$.

Să considerăm creşterea funcționalei $\Delta I := I[y^*+\delta y]-I[y^*]$ în punctul $y^*\in D$.

Definiția 1.2.17. Vom spune că funcționala $I[y]$ este diferențiabilă Fréchet (prescurtat F-diferențiabilă) în punctul $y^*\in D$ dacă creşterea funcționalei ΔI se exprimă sub forma

$$\Delta I = dI[y^*;\delta y]+dI_1[y^*;\delta y], \tag{1.2.16}$$

unde $dI[y^*;\delta y]$ este o funcțională continuă şi liniară în raport cu variabila $\delta y\in X$:

$$dI[y^*;\alpha_1\delta y_1+\alpha_2\delta y_2]=\alpha_1 dI[y^*;\delta y_1]+\alpha_2 dI[y^*;\delta y_2],\ \forall\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R},\forall\delta y_1,\delta y_2\in X,$$

iar funcționala $dI_1[y^*;\delta y]$ satisface condiția $\lim\limits_{\|\delta y\|\to 0}\left(dI_1[y^*;\delta y]/\|\delta y\|\right)=0$. Ținând cont de ultima condiție, deducem relația

$$dI_1[y^*;\delta y]=\varepsilon_1[y^*;\delta y]\cdot\|\delta y\|,\ \lim_{\|\delta y\|\to 0}\varepsilon_1[y^*;\delta y]=0. \tag{1.2.17}$$

Partea principală a creşterii ΔI, liniară în raport cu δy, adică funcționala $dI[y^*;\delta y]$ se numeşte diferențială Fréchet (F-diferențială) [21] a funcționalei $I[y]$ în punctul $y^*\in D$.

Lema 1.2.7. *Funcționala $I:D\subset X\to\mathbb{R}$ F-diferențiabilă în punctul $y^*\in D$ este continuă în y^*.*

Demonstrație. Întrucât I este F-diferențiabilă în y^*, în baza relațiilor (1.2.16)-(1.2.17) deducem inegalitatea:

$$\left|I[y]-I[y^*]\right|\le\left|dI[y^*;y-y^*]\right|+\left\|y-y^*\right\|\cdot\left|\varepsilon_1[y^*;y-y^*]\right|, \tag{1.2.18}$$

unde $dI[y^*;y-y^*]$ este o funcțională liniară şi continuă în raport cu al doilea argument, iar $\lim\limits_{\|y-y^*\|\to 0}\varepsilon_1[y^*;y-y^*]=0$. Atunci când $\left\|y-y^*\right\|\to 0$, ținând cont de liniaritatea şi continuitatea lui $dI[y^*;y-y^*]$, avem $\left|dI[y^*;y-y^*]\right|=\left|dI[y^*;y]-dI[y^*;y^*]\right|\to 0$, de unde, în baza relației (1.2.18), obținem $\left|I[y]-I[y^*]\right|\to 0$ pentru $\left\|y-y^*\right\|\to 0$, adică funcționala I este continuă în punctul y^*. ■

Exemplul 1.2.12. *a) Să se arate că funcționala*

$$I[y(x)]=\int_0^1\left(y(x)+2y'(x)\right)dx,\ y(x)\in C^1[0;1],$$

este continuă şi F-diferențiabilă în punctul $y^*(x)=x$.

b) Fie $\overline{y}=(x_1,x_2)\subset\mathbb{R}^2$. *Să se arate că funcționala*

$$I[\overline{y}]=\begin{cases} x_1^3x_2\big/\left(x_1^6+x_2^2\right), \ pentru\ \overline{y}\neq\overline{0}=(0,0),\\ 0, \qquad pentru\ \overline{y}=\overline{0},\end{cases},$$

nu este continuă şi nici F-diferențiabilă în punctul $\overline{0}$.

a) Continuitatea funcționalei $I[y(x)]$ în $y^*(x)=x$ (în sensul normei din $C^1[0;1]$) a fost demonstrată în exemplul 1.2.2. Deoarece

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{I\left[y^*+\alpha\delta y\right]-I\left[y^*\right]}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\left(\int_0^1\left(x+\alpha\delta y+2\left(1+\alpha\delta y'\right)\right)dx-\int_0^1\left(x+2\right)dx\right)=\int_0^1\left(\delta y+2\delta y'\right)dx$$

reprezintă o funcțională liniară şi continuă în variabila δy, funcționala $I[y(x)]$ este G-diferențiabilă, iar $\delta I\left[y^*(x);\delta y(x)\right]=\int_0^1\left(\delta y+2\delta y'\right)dx$. Funcționala $I[y(x)]$ este şi F-diferențiabilă întrucât are loc:

$$\lim_{\|\delta y\|\to 0}\frac{dI_1\left[y^*;\delta y\right]}{\|\delta y\|}=\lim_{\|\delta y\|\to 0}\frac{I\left[y^*+\delta y\right]-I\left[y^*\right]-\delta I\left[y^*;\delta y\right]}{\|\delta y\|}=0.$$

b) Întrucât de-a lungul curbei $\left(t,t^3\right)$ vom avea $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)}I[\overline{y}]=1/2\ (\neq 0)$, funcționala $I[\overline{y}]$ nu este continuă în punctul $\overline{0}$. Uşor se verifică că $I[\overline{y}]$ este G-diferențiabilă în $\overline{0}$ şi $\delta I\left[\overline{0};\overline{\delta y}\right]=0$. În cazul în care $I[\overline{y}]$ ar fi F-diferențiabilă în $\overline{0}$, s-ar obține $dI_1\left[\overline{0};\overline{\delta y}\right]=\dfrac{\delta y_1^3\delta y_2}{\delta y_1^6+\delta y_2^2}$, iar pentru $\delta y_2=\delta y_1^3$, când $\delta y_1\to 0$ ar rezulta $\lim\limits_{\|\overline{\delta y}\|\to 0}\dfrac{dI_1\left[\overline{0};\overline{\delta y}\right]}{\left\|\overline{\delta y}\right\|}=$

$=\lim\limits_{\delta y_1\to 0}\dfrac{\delta y_1^6}{2\delta y_1^6\sqrt{\delta y_1^2+\delta y_1^6}}=\infty$, ceea ce contrazice faptului că există F-diferențiala $dI\left[\overline{0};\overline{\delta y}\right]$.

Astfel, în punctul $\overline{0}$ funcționala $I[\overline{y}]$ nu este F-diferențiabilă. ■

Reciproca lemei 1.2.7 nu are loc (a se vedea exemplul 1.2.13 de mai jos).

Vom arăta care este legătura dintre G-diferențiala $\delta I[y;\delta y]$ şi F-diferențiala $dI[y;\delta y]$.

Teorema 1.2.2. *Dacă funcționala* $I: D \subset X \to \mathbb{R}$ *este F-diferențiabilă în punctul* $y^* \in D$*, atunci* I *este G-diferențiabilă în* y^**, iar G-diferențiala* $\delta I[y^*;\delta y]$ *coincide cu F-diferențiala* $dI[y^*;\delta y]$*:* $\delta I[y^*;\delta y] = dI[y^*;\delta y]$.

Demonstrație. Fie $\delta y \in X$ şi $\alpha \neq 0$ suficient de mic încât punctul $y = y^* + \alpha\delta y \in D$. Funcționala $I: D \subset X \to \mathbb{R}$ fiind F-diferențiabilă în punctul $y^* \in D$, pentru creşterea ei $\Delta I = I[y] - I[y^*]$ are loc reprezentarea:

$$\Delta I = dI[y^*;\alpha\delta y] + dI_1[y^*;\alpha\delta y],$$

în care $dI[y^*;\alpha\delta y]$ este o funcțională liniară şi continuă în δy, iar $dI_1[y^*;\alpha\delta y]$ satisface condiția $\lim\limits_{\|\alpha\delta y\|\to 0}\left(dI_1[y^*;\alpha\delta y]/\|\alpha\delta y\|\right) = 0$. Întrucât $dI[y^*;\alpha\delta y]$ este o funcțională liniară în δy, avem $\dfrac{dI[y^*;\alpha\delta y]}{\alpha} = \dfrac{\alpha\, dI[y^*;\delta y]}{\alpha} = dI[y^*;\delta y]$, şi, ținând cont că $\|\alpha\delta y\| = |\alpha|\|\delta y\| \to 0$ când $\alpha \to 0$, obținem $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{dI_1[y^*;\alpha\delta y]}{\alpha} = \|\delta y\| sign\,\alpha \cdot \lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{dI_1[y^*;\alpha\delta y]}{\|\alpha\delta y\|} = 0$. Deci există $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\Delta I}{\alpha} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{I[y^* + \alpha\delta y] - I[y^*]}{\alpha}$ $=: \delta I[y^*;\delta y]$, adică I este G-diferențiabilă în y^*. În plus avem $\delta I[y^*;\delta y] = \lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{I[y^* + \alpha\delta y] - I[y^*]}{\alpha} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\Delta I}{\alpha} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{dI[y^*;\alpha\delta y]}{\alpha} + \lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{dI_1[y^*;\alpha\delta y]}{\alpha} = dI[y^*;\delta y]$. ■

Remarca 1.2.4. Teorema 1.2.2 reprezintă o generalizare la cazul spațiilor infinit dimensionale a cunoscutei teoreme din analiza matematică, conform căreia, din existența derivatelor parțiale într-o careva vecinătate a punctului y^* şi din continuitatea acestor derivate parțiale în y^*, rezultă diferențiabilitatea funcției de mai multe variabile.

Reciproca teoremei 1.2.2 nu este adevărată. Aceasta se explică în modul următor: definiția G-diferențialei impune cantităților $\left(I[y^* + \alpha\delta y] - I[y^*]\right)/\alpha$ să conveargă de-a lungul fiecărei direcții în parte, fără a impune restricții asupra vitezei de convergență de-a lungul diferitor direcții. Fiind dat $\varepsilon > 0$, pentru fiecare direcție există o vecinătate a punctului dat, încât cantitățile menționate sunt la distanță mai mică decât ε de limitele lor. Se poate întâmpla că există un şir de direcții pentru care aceste vecinătăți devin arbitrar de mici. Dacă se alege un şir de puncte de-a lungul acestor direcții, cantitățile $\left(dI_1\left[y^*;\delta y\right]\right)/\|\delta y\|$ din definiția F-diferențialei, care consideră toate direcțiile în acelaşi timp, ar putea să nu conveargă. Astfel, pentru ca G-diferențiala liniară să implice existența F-diferențialei, cantitățile $\left(I[y^* + \alpha\delta y] - I[y^*]\right)/\alpha$ urmează să conveargă uniform pentru toate direcțiile.

Liniaritatea şi continuitatea G-diferențialei pot să nu fie suficiente pentru ca funcționala I să fie F-diferențiabilă.

Exemplul 1.2.13. *a) Fie $\overline{y}=(x_1,x_2)\subset\mathbb{R}^2$. Să se arate că funcționala*

$$I[\overline{y}]=\begin{cases} x_1+x_2+x_1^3x_2\big/\left(x_1^4+x_2^2\right), & pentru\ \overline{y}\neq\overline{0}=(0,0),\\ 0, & pentru\ \overline{y}=\overline{0},\end{cases},$$

este G-diferențiabilă în punctul $\overline{0}$, iar G-diferențiala $\delta I\left[\overline{0};\overline{\delta y}\right]$ este liniară şi continuă în raport cu $\overline{\delta y}$. Să se arate că $I[\overline{y}]$ nu este F-diferențiabilă;

b) Fie X un spațiu Banach, $\dim X=\infty$, $J:X\to\mathbb{R}$ o funcțională liniară pe X, discontinuă în punctul 0_X, iar $I[y]:=\|y\|J[y]$. Să se arate că $I[y]$ este G-diferențiabilă în 0_X, iar G-diferențiala $\delta I[0_X;\delta y]$ este liniară şi continuă în raport cu δy. Să se arate că $I[y]$ nu este F-diferențiabilă.

a) Funcționala $I[\overline{y}]$ este continuă pentru $\overline{y}=(x_1,x_2)\neq\overline{0}$, iar în virtutea relației

$$\left|\frac{x_1^3x_2}{x_1^4+x_2^2}\right|=\frac{|x_1|^{5/2}|x_1|^{1/2}|x_2|}{x_1^4+x_2^2}\le\frac{1}{2}|x_1|,$$

rezultă că $I[\overline{y}]$ este continuă şi în punctul $\overline{0}$.

Fie $\overline{\delta y}=(\delta y_1,\delta y_2)$. Pentru $\overline{\delta y}\neq\overline{0}$ avem

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{I\left[\overline{0}+\alpha\overline{\delta y}\right]-I\left[\overline{0}\right]}{\alpha}=\lim_{\alpha\to0}\frac{\alpha\delta y_1+\alpha\delta y_2+\dfrac{\alpha^4\delta y_1^3\delta y_2}{\alpha^4\delta y_1^4+\alpha^2\delta y_2^2}}{\alpha}=\delta y_1+\delta y_2.$$

Prin urmare, $I[\overline{y}]$ este G-diferențiabilă în punctul $\overline{y}=\overline{0}$, iar G-diferențiala $\delta I\left[\overline{0};\overline{\delta y}\right]$ este egală cu $\delta I\left[\overline{0};\overline{\delta y}\right]=\delta y_1+\delta y_2$. Ultima relație arată că $\delta I\left[\overline{0};\overline{\delta y}\right]$ este liniară şi continuă în raport cu $\overline{\delta y}$.

Să admitem că există F-diferențiala $dI\left[\overline{0};\overline{\delta y}\right]$. Atunci, conform teoremei 1.2.2, avem $dI\left[\overline{0};\overline{\delta y}\right]=\delta I\left[\overline{0};\overline{\delta y}\right]$, iar din relația (1.2.10) rezultă

$$dI_1\left[\overline{0};\overline{\delta y}\right]=I\left[\overline{0}+\overline{\delta y}\right]-I\left[\overline{0}\right]-dI\left[\overline{0};\overline{\delta y}\right]=\frac{\delta y_1^3\delta y_2}{\delta y_1^4+\delta y_2^2}.$$

Fie $\delta y_2=\delta y_1^2$. Atunci $\left\|\overline{\delta y}\right\|=\sqrt{\delta y_1^2+\delta y_2^2}=\sqrt{\delta y_1^2+\delta y_1^4}\to0$ pentru $\delta y_1\to0$. Astfel când $\delta y_1\to0$ avem $\lim\limits_{\|\overline{\delta y}\|\to0}\dfrac{dI_1\left[\overline{0};\overline{\delta y}\right]}{\left\|\overline{\delta y}\right\|}=\lim\limits_{\|\overline{\delta y}\|\to0}\dfrac{\delta y_1^3\delta y_2}{\left(\delta y_1^4+\delta y_2^2\right)\sqrt{\delta y_1^2+\delta y_2^2}}=\lim\limits_{\delta y_1\to0}\dfrac{\delta y_1^5}{2\delta y_1^4\sqrt{\delta y_1^2+\delta y_1^4}}=\dfrac{1}{2}(\neq0)$, ceea ce contrazice faptului că există F-diferențiala $dI\left[\overline{0};\overline{\delta y}\right]$. Astfel, în punctul $\overline{0}$ funcționala $I[\overline{y}]$ nu este F-diferențiabilă.

b) Fie $\delta y\in X$. Avem

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{I[0_X+\alpha\delta y]-I[0_X]}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{|\alpha|\|\delta y\|J[\alpha\delta y]}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{|\alpha|\|\delta y\|\alpha J[\delta y]}{\alpha}=0.$$

Prin urmare, $I[y]$ este G-diferențiabilă în punctul $y=0_X$, iar G-diferențiala $\delta I[0_X;\delta y]=0$ este liniară şi continuă în raport cu δy.

Să admitem că există F-diferențiala $dI[0_X;\delta y]$. Atunci, conform teoremei 1.2.2, avem $dI[0_X;\delta y]=\delta I[0_X;\delta y]$, iar din relația (1.2.10) rezultă

$$dI_1[0_X;\delta y]=I[0_X+\delta y]-I[0_X]-dI[0_X;\delta y]=\|\delta y\|J[\delta y].$$

Avem $\lim\limits_{\|\delta y\|\to 0}\frac{dI_1[0_X;\delta y]}{\|\delta y\|}=\lim\limits_{\|\delta y\|\to 0}\frac{\|\delta y\|J[\delta y]}{\|\delta y\|}=\lim\limits_{\|\delta y\|\to 0}J[\delta y]$, iar ultima limită nu există, întrucât funcționala $J[y]$ este discontinuă în punctul 0_X. S-a ajuns la o contradicție cu faptul că există F-diferențiala $dI[0_X;\delta y]$. Astfel, în punctul 0_X funcționala $I[y]$ nu este F-diferențiabilă. ■

În baza lemei 1.2.7, a teoremei 1.2.2 şi a exemplelor date mai sus, vom formula următorul algoritm pentru stabilirea F-diferențiabilității funcționalei $I[y]$ în punctul $y^*\in D$:

Algoritmul 1.2.1.

Pasul I. Se verifică dacă G-diferențiala $\delta I[y^*;y-y^*]$ există pentru orice $y\in X$;

Pasul II. Se verifică dacă funcționala $\delta I[y^*;y-y^*]$ este liniară şi continuă în variabila $y-y^*$ şi în caz afirmativ se consideră funcționala $dI[y^*;y-y^*]:=\delta I[y^*;y-y^*]$;

Pasul III. Se verifică dacă

$$dI_1[y^*;y-y^*]:=\frac{I[y]-I[y^*]-dI[y^*;y-y^*]}{\|y-y^*\|}\to 0$$

atunci când $\|y-y^*\|\to 0$ (pentru $y\neq y^*$).

Dacă la fiecare dintre cei trei paşi ai algoritmului răspunsul e afirmativ, atunci funcționala I este F-diferențiabilă în punctul $y^*\in D$; în caz contrar - I nu este F-diferențiabilă în y^*.

Teorema 1.2.3. *Fie $(X,\|\cdot\|)$ un spațiu liniar normat, $I:X\to\mathbb{R}$, $y^*\in X$ şi sunt satisfăcute următoarele condiții:*

a) Există $r>0$ astfel încât pentru orice $y\in V(y^*;r)$ funcționala $I[y]$ posedă G-diferențiala $\delta I[y;\delta y]$;

b) G-diferențiala $\delta I[y^*;\delta y]$ este liniară şi continuă în variabila δy;

c) $\left|\delta I[y;\widetilde{\delta y}]-\delta I[y^*;\widetilde{\delta y}]\right|\to 0$ *uniform când* $y\to y^*$, *pentru* $\widetilde{\delta y}\in B:=\left\{\widetilde{\delta y}\in X\,\middle|\,\left\|\widetilde{\delta y}\right\|_X=1\right\}$.

Atunci funcționala $I[y]$ *este F-diferențiabilă în* y^*.

Demonstrație. Orice element $y\in V(y^*;r)$ se poate reprezenta sub forma $y=y^*+\alpha\widetilde{\delta y}$, unde $|\alpha|=\|y-y^*\|\le r,\ \widetilde{\delta y}\in B$. Pentru $\widetilde{\delta y}\in B$ fix funcția $\varphi(\alpha):=I\left[y^*+\alpha\widetilde{\delta y}\right]$ admite derivată continuă pe intervalul $(-r;r)$. Atunci, pentru $\alpha_1\in(-r;r)$ încât $\varepsilon=\alpha-\alpha_1\ne 0$ și $y_1=y^*+\alpha_1\widetilde{\delta y}$ avem $y^*+\alpha\widetilde{\delta y}=y_1+\varepsilon\widetilde{\delta y}$, iar $\varphi'(\alpha_1)=\lim\limits_{\alpha\to\alpha_1}\big((\varphi(\alpha)-\varphi(\alpha_1))/(\alpha-\alpha_1)\big)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\left(I\left[y_1+\varepsilon\widetilde{\delta y}\right]-I[y_1]\right)/\varepsilon\right)=$ $=\delta I\left[y_1;\widetilde{\delta y}\right]$. Derivabilitatea funcției $\varphi(\alpha)$ implică continuitatea acesteia, de unde rezultă că pentru $\alpha\to 0$ avem $\varphi(\alpha)=I\left[y^*+\alpha\widetilde{\delta y}\right]=I[y]\to I\left[y^*\right]$. Conform teoremei de medie a lui Lagrange (a se vedea Anexa) avem:

$$I[y]-I\left[y^*\right]=I\left[y^*+\alpha\widetilde{\delta y}\right]-I\left[y^*\right]=\varphi(\alpha)-\varphi(0)=\alpha\varphi'(\alpha_1)=\alpha\delta I\left[y_1;\widetilde{\delta y}\right]$$

pentru un $\alpha_1\in(-\alpha;\alpha)$. Ultima relație și condiția b) implică:

$$I[y]-I\left[y^*\right]-\delta I\left[y^*;y-y^*\right]=I[y]-I\left[y^*\right]-\alpha\delta I\left[y^*;\widetilde{\delta y}\right]=\alpha\left(\delta I\left[y_1;\widetilde{\delta y}\right]-\delta I\left[y^*;\widetilde{\delta y}\right]\right).$$

Întrucât are loc $\|y_1-y^*\|=|\alpha_1|<|\alpha|=\|y-y^*\|$ rezultă, dacă $y\to y^*$, atunci $y_1\to y^*$, iar în baza condiției c) din ipoteza lemei, obținem:

$$\left|\left(I[y]-I\left[y^*\right]-\delta I\left[y^*;y-y^*\right]\right)/\|y-y^*\|\right|=\left|\delta I\left[y_1;\widetilde{\delta y}\right]-\delta I\left[y^*;\widetilde{\delta y}\right]\right|\to 0 \text{ când } y\to y^*.$$

Conform definiției 1.2.17 funcționala $I[y]$ este F-diferențiabilă în $y^*\in X$. ■

Remarca 1.2.5. Liniaritatea lui $\delta I[y^*;\delta y]$ în variabila δy din ipoteza b) a teoremei 1.2.3 este de prisos. Aceasta rezultă din condiția c) a teoremei (a se vedea [25]).

Definiția 1.2.18. Vom spune că funcționala $I[y]$ este de două ori F-diferențiabilă în punctul $y^*\in D$, dacă creșterea sa $\Delta I:=I[y^*+\delta y]-I[y^*]$ se poate scrie sub forma

$$\Delta I=dI[y^*;\delta y]+\frac{1}{2}d^2I[y^*;\delta y]+dI_2[y^*;\delta y],$$

în care $dI[y^*;\delta y]$ este o funcțională liniară și continuă în δy, $d^2I[y^*;\delta y]$ - o funcțională pătratică în δy (a se vedea Anexa), iar $dI_2[y^*;\delta y]$ satisface condiția $\lim\limits_{\|\delta y\|\to 0}\left(dI_2[y^*;\delta y]/\|\delta y\|^2\right)=0$. Ultima condiție implică reprezentarea:

$$dI_2[y^*;\delta y]=\varepsilon_2[y^*;\delta y]\cdot\|\delta y\|^2,\ \lim_{\|\delta y\|\to 0}\varepsilon_2[y^*;\delta y]=0. \tag{1.2.19}$$

Funcționala pătratică în raport cu δy, adică $d^2I[y^*;\delta y]$ se numește F-diferențială (variație) de ordinul doi a funcționalei $I[y]$ în punctul $y^*\in D$.

Exemplul 1.2.14. *Fie* $\Omega:=[a;b]\times\Delta_2$ $\left([a;b]\subset\mathbb{R},\Delta_2\subset\mathbb{R}^2\right)$ *o mulțime deschisă, iar* $F:\Omega\to\mathbb{R}$ *o funcție de clasă* C^3. *Să se arate că funcționala*

$$I[y(x)]=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))\,dx,$$

definită pe mulțimea funcțiilor admisibile

$$D := \left\{ y(x) \in C^1[a;b] \,\middle|\, \left(x, y(x), y'(x)\right) \in \Omega,\ \forall x \in [a;b],\ y(a) = y_a, y(b) = y_b, y_a, y_b \in \mathbb{R} \right\},$$

este de două ori F-diferențiabilă în orice punct $y^*(x) \in D$ şi să se calculeze variațiile de ordinul I şi II ale acesteia. Să se arate că funcționala

$$I[y] = \int_a^b F\left(x, y(x), y'(x)\right) dx,$$

este F-diferențiabilă în orice punct $y^* \in X := C^1[a;b]$ (în norma maximum $\|y(x)\| = \max_{x\in[a;b]} |y(x)|$).

Fie $y^*(x) \in D$ o funcție admisibilă. Funcția $y(x) := y^*(x) + \delta y(x)$ ($\delta y(x) \in C^1[a;b]$ fixă) va aparține mulțimii D dacă şi numai dacă $\delta y(x) \in H_1$ (mulțimea H_1 este definită prin relația (1.2.2)). Pentru aşa funcție avem

$$I\left[y^*(x) + \delta y(x)\right] = \int_a^b F\left(x, y^*(x) + \delta y(x), y^{*\prime}(x) + \delta y'(x)\right) dx.$$

Conform formulei lui Taylor pentru funcția de mai multe variabile

$$F\left(x, y^*(x) + \delta y(x), y^{*\prime}(x) + \delta y'(x)\right) = F\left(x, y^*(x), y^{*\prime}(x)\right) +$$

$$+ F_y\left(x, y^*(x), y^{*\prime}(x)\right)\delta y(x) + F_{y'}\left(x, y^*(x), y^{*\prime}(x)\right)\delta y'(x) + o\left(\|\delta y(x)\|\right),$$

de unde rezultă

$$I\left[y^*(x) + \delta y(x)\right] = I\left[y^*(x)\right] + \int_a^b \left(F_y\left(x, y^*(x), y^{*\prime}(x)\right)\delta y(x) + F_{y'}\left(x, y^*(x), y^{*\prime}(x)\right)\delta y'(x)\right) dx + o\left(\|\delta y(x)\|\right).$$

Din ultima relație rezultă că funcționala $I[y]$ este F-diferențiabilă pentru orice $y^* \in D$, iar conform teoremei 1.2.2, F-diferențiala sa coincide cu G-diferențiala.

Analog, utilizând formula lui Taylor de ordinul doi deducem, că funcționala $I\left[y(x)\right]$ este de două ori F-diferențiabilă, iar F-diferențiala de ordinul doi $d^2 I\left[y^*(x); \delta y(x)\right]$ coincide cu variația de ordinul doi (a se vedea relația (1.2.16)) calculată în exemplul (1.2.2). ■

Exemplul 1.2.15. *Să se afle variațiile de ordinul întâi şi doi ale funcționalei*

$$I[y] = \int_0^1 \left(x y^2(x) + y'^3(x)\right) dx,$$

definită pe $D := C^1[0;1]$.

Vom calcula variațiile funcționalei, utilizând definițiile 1.2.15-1.2.16. Avem

$$\delta I[y^*(x); \delta y(x)] := \left.\frac{dI[y^*(x) + \alpha\delta y(x)]}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \left.\left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(x\left(y^*(x) + \alpha\delta y(x)\right)^2 + \left(y^{*\prime}(x) + \alpha\delta y'(x)\right)^3\right) dx\right)\right|_{\alpha=0} =$$

$$= \left.\left(\int_0^1 \left(2x\left(y^*(x) + \alpha\delta y(x)\right)\delta y(x) + 3\left(y^{*\prime}(x) + \alpha\delta y'(x)\right)^2 \delta y'(x)\right) dx\right)\right|_{\alpha=0} = \int_0^1 \left(2x y^*(x)\delta y(x) + 3 y^{*\prime 2}(x)\delta y'(x)\right) dx;$$

$$\delta^2 I[y^*(x);\delta y(x)] := \left.\frac{d^2 I[y^*(x)+\alpha\delta y(x)]}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} = \left.\left(\int_0^1\Big(2x\delta y^2(x)+6\big(y^{*\prime}(x)+\alpha\delta y'(x)\big)\delta y'^2(x)\Big)dx\right)\right|_{\alpha=0} =$$

$$=2\int_0^1\Big(x\delta y^2(x)+3y^{*\prime}(x)\delta y'^2(x)\Big)dx .$$

Pentru comparaţie vom calcula variaţiile funcţionalei, utilizând definiţiile 1.2.17-1.2.18. Pentru creşterea funcţionalei avem

$$\Delta I = I[y^*+\delta y]-I[y^*]=\int_0^1\Big(x(y^*+\delta y)^2+(y^{*\prime}+\delta y')^3-xy^{*2}-y^{*\prime 3}\Big)dx=\int_0^1\Big(2xy^*\delta y+x(\delta y)^2+3y^{*\prime 2}\delta y'+$$

$$+3y^{*\prime}(\delta y')^2+(\delta y')^3\Big)dx=\int_0^1\Big(2xy^*\delta y+3y^{*\prime 2}\delta y'\Big)dx+\int_0^1\Big(x(\delta y)^2+3y^{*\prime}(\delta y')^2\Big)dx+\int_0^1(\delta y')^3dx .$$

Pentru y^* - fixat, primul termen din membrul drept este funcţională liniară în raport cu δy, iar al doilea termen este funcţională pătratică în raport cu δy. Termenul al treilea admite estimaţia

$$\left|\int_0^1(\delta y'(x))^3dx\right|\le\Big(\max_{x\in[0;1]}|\delta y'(x)|\Big)^3\le\|\delta y(x)\|^3_{C^1[0;1]} .$$

Se vede că $\|\delta y(x)\|^3_{C^1[0;1]}\big/\|\delta y(x)\|^2_{C^1[0;1]}\to 0$ când $\|\delta y(x)\|_{C^1[0;1]}\to 0$, iar în acest caz şi $\left|\int_0^1(\delta y'(x))^3dx\right|\Big/\|\delta y(x)\|^2_{C^1[0;1]}\to 0$. Atunci, conform definiţiei 1.2.18, funcţionala $I[y]$ este de două ori F-diferenţiabilă în punctul y^* şi $d^2I[y^*;\delta y]=\delta^2 I[y^*;\delta y]=2\int_0^1\Big(x(\delta y)^2+3y^{*\prime}(\delta y')^2\Big)dx$.

Totodată, pentru termenul $\int_0^1\Big(x(\delta y)^2+3y^{*\prime}(\delta y')^2\Big)dx$ avem

$$\left|\int_0^1\Big(x(\delta y)^2+3y^{*\prime}(\delta y')^2\Big)dx\right|\le\int_0^1\Big(x|\delta y|^2+3|y^{*\prime}||\delta y'|^2\Big)dx\le c\left(\Big(\max_{x\in[0;1]}|\delta y|\Big)^2+\Big(\max_{x\in[0;1]}|\delta y'|\Big)^2\right)\le$$

$$\le c\Big(\max_{x\in[0;1]}|\delta y|+\max_{x\in[0;1]}|\delta y'|\Big)^2=c\|\delta y\|^2_{C^1[0;1]} ,$$

şi, atunci, $\left|\int_0^1\Big(x(\delta y)^2+3y^{*\prime}(\delta y')^2\Big)dx+\int_0^1(\delta y')^3dx\right|\Big/\|\delta y\|\to 0$ când $\|\delta y(x)\|_{C^1[0;1]}\to 0$. Conform definiţiei 1.2.17 şi teoremei 1.2.2, funcţionala $I[y]$ este F-diferenţiabilă în punctul y^* şi

$$dI[y^*;\delta y]=\delta I[y^*;\delta y]=\int_0^1\Big(2xy^*\delta y+3y^{*\prime 2}\delta y'\Big)dx . \ \blacksquare$$

Remarca 1.2.6. În cele ce urmează se va lucra cu funcţionale ce vor fi F-diferenţiabile şi, conform tradiţiei, se va vorbi despre variaţia de ordinul întâi în loc de F-diferenţială.

1.2.5. Condiţii necesare de extrem al funcţionalei

În continuare se vor stabili condiții necesare pentru ca o funcție admisibilă să realizeze un extrem local slab al funcționalei. Aceste condiții sunt necesare şi pentru un extrem local tare sau absolut. Condițiile necesare de extrem al unei funcționale se exprimă prin diferențialele (variațiile) acesteia.

Fie $(X,\|\cdot\|)$ un spațiu liniar normat, $I:X\to\mathbb{R}$ o funcțională, iar $D\subset X$ mulțimea elementelor admisibile într-o problemă de extrem al funcționalei $\underset{y\in D}{extr}\, I[y]$.

Ca şi în cazul funcțiilor reale (a se vedea teorema lui Fermat) următoarea teoremă furnizează condiții necesare de ordinul I de extrem al funcționalei.

Teorema 1.2.4. *Fie $D\subset X$ o mulțime deschisă şi $I:D\to\mathbb{R}$ o funcțională. Dacă $y^*\in D$ este un punct de extrem local pentru $I[y]$ şi dacă $I[y]$ este G-diferențiabilă în y^* cu G-diferențiala $\delta I[y^*;\delta y]$, atunci y^* este punct staționar al lui $I[y]$, adică $\delta I[y^*;\delta y]=0,\ \forall\delta y\in X$.*

Demonstrație. În cazul în care $\delta y=0_X$, vom avea $\Delta I=I[y^*+\alpha\delta y]-I[y^*]=0$ $(\alpha\in\mathbb{R})$, şi atunci, evident că $\delta I[y^*;\delta y]=0$. Să presupunem acum că $\delta y\neq 0_X$ $(\delta y\in X)$ şi că $y^*\in D$ este punct de minim local. În cazul în care y^* este punct de maxim local, raționamentul este similar.

Conform definiției punctului de minim local, $\exists r>0$ astfel încât pentru $\forall y\in D\cap V(y^*;r)$ are loc $I[y]\geq I[y^*]$. Mulțimea D fiind deschisă, putem alege un $r_1>0\,(r_1\leq r)$ suficient de mic, astfel încât $V(y^*;r_1)\subset D$ şi atunci $I[y]\geq I[y^*]$ pentru $\forall y\in V(y^*;r_1)$ $\left(V(y^*;r_1)\subseteq V(y^*;r)\right)$. Deoarece pentru un α ce satisface $|\alpha|\leq r_1/\|\delta y\|$ elementul $y=y^*+\alpha\delta y\in V(y^*;r_1)$ rezultă, că are loc inegalitatea $I[y^*+\alpha\delta y]\geq I[y^*]$ pentru orice $\alpha\in\left[-r_1/\|\delta y\|\,;\,r_1/\|\delta y\|\right]$. Ținând seama de definiția funcției reale $\varphi:\left[-r_1/\|\delta y\|\,;\,r_1/\|\delta y\|\right]\to\mathbb{R}$, $\varphi(\alpha):=I[y^*+\alpha\delta y]$, ultima inegalitate se mai poate scrie sub forma $\varphi(\alpha)\geq\varphi(0),\ \forall\alpha\in\left[-r_1/\|\delta y\|\,;\,r_1/\|\delta y\|\right]$, adică $\alpha=0$ reprezintă un minim local al funcției $\varphi(\alpha)$. Întrucât $\varphi(\alpha)$ este derivabilă în punctul $y^*\in D$ ($I[y]$ este G-diferențiabilă în y^*), în baza teoremei clasice a lui Fermat pentru funcțiile de o variabilă reală [19], conchidem că $\varphi'(0)=0$ sau, echivalent, $\delta I[y^*,\delta y]=0$. ■

Următoarea teoremă furnizează condiții necesare de ordinul II de extrem al funcționalei.

Teorema 1.2.5. *Fie $D\subset X$ o mulțime deschisă şi $I:D\to\mathbb{R}$ o funcțională. Dacă $I[y]$ este de două ori F-diferențiabilă în punctul $y^*\in D$ cu F-diferențiala $d^2I[y^*;\delta y]=\delta^2I[y^*;\delta y]$, iar y^**

este punct de minim local (maxim local), atunci $\delta^2 I[y^*;\delta y]\geq 0$ *(*$\delta^2 I[y^*;\delta y]\leq 0$*) pentru orice* $\delta y\in X$ *.*

Demonstrație. Presupunem că y^* realizează un minim local al funcționalei $I[y]$ (cazul maximului local se cercetează la fel sau se reduce la cazul precedent, considerând funcționala $-I[y]$).

Contrar afirmației teoremei admitem că există $\delta y\in X$ astfel încât $\delta^2 I[y^*;\delta y]<0$. Pentru acest δy considerăm creşterea funcționalei $\Delta I = I[y^*+\alpha\delta y]-I[y^*]$ ce corespunde variației argumentului $\alpha\delta y, \alpha\in\mathbb{R}$.

Întrucât $y^*\in D$ realizează un minim local al funcționalei $I[y]$ şi aceasta din urmă este F-diferențiabilă în y^* (prin urmare, şi G-diferențiabilă), conform teoremei 1.2.4, G-diferențiala în punctul $y^*\in D$ este egală cu zero $\delta I[y^*;\delta y]=0$. Totodată, conform definiției 1.2.18, pentru creşterea funcționalei ΔI are loc reprezentarea:

$$\Delta I = dI[y^*;\alpha\delta y]+\frac{1}{2}d^2 I[y^*;\alpha\delta y]+\varepsilon[y^*;\alpha\delta y]\|\alpha\delta y\|^2 .$$

Aici avem $dI[y^*;\alpha\delta y]=\delta I[y^*;\alpha\delta y]=\alpha\delta I[y^*;\delta y]=0$, iar $|\varepsilon[y^*;\alpha\delta y]|\to 0$ când $\|\alpha\delta y\|\to 0$, adică când $|\alpha|\to 0$. Întrucât funcționala pătratică $d^2 I[y^*;\alpha\delta y]$ satisface condiția $d^2 I[y^*;\alpha\delta y]=\delta^2 I[y^*;\alpha\delta y]=\alpha^2\delta^2 I[y^*;\delta y]$, în fine, vom avea

$$\Delta I = \frac{1}{2}\alpha^2\delta^2 I[y^*;\delta y]+\varepsilon[y^*;\alpha\delta y]\alpha^2\|\delta y\|^2 .$$

Se poate de ales un α suficient de mic, astfel încât să avem $|\varepsilon[y^*;\alpha\delta y]|<\dfrac{\delta^2 I[y^*;\delta y]}{2\|\delta y\|^2}$.

Rezultă, pentru orice $|\alpha|$ suficient de mic vom avea $\Delta I = \frac{1}{2}\alpha^2\left(\delta^2 I[y^*;\delta y]+\delta^2 I[y^*;\delta y]\right)=$ $=\alpha^2\delta^2 I[y^*;\delta y]<0$. Am ajuns la o contradicție, deoarece y^* realizează un minim local al funcționalei $I[y]$ şi, prin urmare, $\Delta I = I[y^*+\alpha\delta y]-I[y^*]\geq 0$ într-o careva vecinătate a lui y^*. ■

1.2.6. Existenţa şi unicitatea extremelor funcţionalelor

În această secțiune se vor prezenta unele rezultate privind existența punctelor de extrem al funcționalelor. Este evident că ne putem limita doar la probleme ce țin de puncte de minim, pentru cele de maxim considerându-se funcționala $-I[y]$.

I. Cazul general

Teorema lui Weierstrass, conform căreia o funcție continuă $f:[a;b]\to\mathbb{R}$, $-\infty<a<b<\infty$, are minim şi maxim pe $[a;b]$, poate fi extinsă la cazul funcționalelor $I:D\to\mathbb{R}$, definite pe mulțimi compacte D dintr-un spațiu liniar normat X. Dacă X este spațiu liniar finit dimensional, atunci D poate fi mărginită şi închisă (aceasta fiind şi compactă), însă în spațiile infinit dimensionale, rezultatul nu mai este adevărat pentru mulțimi mărginite şi închise (acestea nefiind numaidecât compacte). Astfel problema variațională ar putea să nu posede soluție (are infimum, dar acesta nu se atinge).

Exemplul 1.2.16. *Să se arate că următoarea problemă variațională*

$$I[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}dx \to \min,$$

$$y(x) \in D := \left\{ y(x) \in C[a;b] \| y(x) \in C^2(a;b),\ y(a) = y(b) = 0,\ y'(a) = y'(b) = \infty \right\},$$

nu are soluții.

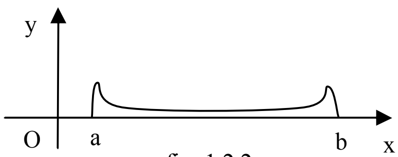


fig. 1.2.2

Mulțimea funcțiilor admisibile D constă din funcții $y(x)$ continue pe $[a;b]$ (şi de clasă C^2 pe $(a;b)$), care se anulează în punctele a, b şi posedă în acestea tangente verticale. Expresia funcționalei ne sugerează următoarea interpretare geometrică: de aflat drumul cel mai scurt dintre punctele $A(a;0)$ şi $B(b;0)$, cu condiția că la extremitățile drumului direcția de mişcare este verticală. Din figura 1.2.2 se vede că funcția de clasă cerută se poate alege astfel încât lungimea graficului ei se va deosebi oricât de puțin de lungimea segmentului $[a;b]$ al axei Ox. Dintre toate curbele ce conectează punctele A şi B segmentul dat (graficul funcției identic nule) are cea mai mică lungime, dar funcția nulă nu este o funcție admisibilă în PEF dată. Întrucât funcționala $I[y(x)]$ nu îşi atinge infimumul pe MFA, problema de CV formulată nu are soluții. ■

Vom arăta că pentru existența punctului de minim (maxim) al funcționalei $I: D \to \mathbb{R}$, compacitatea domeniului de definiție D şi semicontinuitatea inferioară (superioară) a funcționalei sunt suficiente [20, p. 224-225].

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu liniar normat.

Definiția 1.2.19. Vom spune că mulțimea $D \subset X$ este închisă dacă pentru fiecare şir $\{y_n\} \subset D$, convergent la y^*, avem $y^* \in D$.

Definiția 1.2.20. Vom spune că mulțimea $D \subset X$ este relativ compactă dacă fiecare şir în D are un subşir convergent.

Definiția 1.2.21. Vom spune că mulțimea $D \subset X$ este compactă dacă fiecare şir în D are un subşir convergent la un element din D.

Se vede că mulțimea D este compactă dacă şi numai dacă ea este relativ compactă şi închisă. Orice mulțime relativ compactă este mărginită [1, p.45], însă reciproca acestei afirmații nu este adevărată.

Definiția 1.2.22. Vom spune că funcționala $I: D \subset X \to \mathbb{R}$ este inferior (superior) semicontinuă pe D dacă, pentru orice $y \in D$ şi orice şir $\{y_n\} \subset D$ convergent către y, avem

$$I[y] \le \liminf_{n\to\infty} I[y_n] \quad \left(I[y] \ge \limsup_{n\to\infty} I[y_n] \right).$$

Reamintim că $\liminf_{n\to\infty} I[y_n] = \sup_{V\in V(y)} \inf_{y_n \in V} I[y_n]$, $\limsup_{n\to\infty} I[y_n] = \inf_{V\in V(y)} \sup_{y_n\in V} I[y_n]$.

Exemplul 1.2.17. Funcţionala $I: D \to \mathbb{R}$ definită prin $I[y] = \begin{cases} 0, \text{ dacă } y \in D \\ \infty, \text{ dacă } y \notin D \end{cases}$, unde D o mulţime închisă, este inferior semicontinuă. ■

Teorema 1.2.5. **(Generalizare a teoremei lui Weierstrass)** *Fie $D \subset X$ o mulţime compactă şi $I: D \to \mathbb{R}$ o funcţională inferior (superior) semicontinuă. Atunci $I[y]$ este mărginită inferior (superior) pe D şi îşi atinge infimumul (supremumul), adică problema de minim (maxim) $\min_{y\in D} I[y]$ $\left(\max_{y\in D} I[y]\right)$ are soluţie în D.*

Demonstraţie. În ipotezele teoremei să admitem că funcţionala $I[y]$ este nemărginită inferior pe D. Atunci există un şir $\{y_n\} \subset D$ astfel încât $I[y_n] < -n$ pentru toţi n. Întrucât D - mulţime compactă (în particular, închisă) şirul $\{y_n\}$ conţine subşirul $\{y_{n_k}\}$ care converge la $y^* \in D$. De aici, în virtutea faptului că funcţionala $I[y]$ este inferior semicontinuă avem $I[y^*] \le \liminf_{k\to\infty} I[y_{n_k}]$, ceea ce este imposibil deoarece avem $I[y_{n_k}] < -n_k$ şi, prin urmare, $\lim_{k\to\infty} I[y_{n_k}] = -\infty$. Contradicţia obţinută demonstrează că funcţionala $I[y]$ este mărginită inferior. Analog se demonstrează că $I[y]$ este mărginită superior.

Fie $d = \inf_{y\in D} I[y]$. Aceasta înseamnă că $d \le I[y], \forall y \in D$, şi pentru $\forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in D$ astfel încât $I[y_\varepsilon] < d + \varepsilon$. Prin urmare, există şirul de puncte $\{z_n\} \subset D$ astfel încât $d \le I[z_n] < d + 1/n$. Întrucât D - mulţime compactă, şirul $\{z_n\}$ conţine subşirul $\{z_{n_k}\}$ convergent la $z^* \in D$, şi, atunci $d \le I[z_{n_k}] < d + 1/n_k$, de unde rezultă existenţa şirului minimizator $\{z_{n_k}\} \subset D$ astfel încât $\lim_{k\to\infty} I[z_{n_k}] = d$. Pe de altă parte, deoarece $I[y]$ este inferior semicontinuă pe D, în particular posedă această proprietate în punctul $z^* \in D$, deci

$$I[z^*] \le \liminf_{k\to\infty} I[z_{n_k}] = \lim_{k\to\infty} I[z_{n_k}] = d.$$

În baza inegalităţii $d \le I[y], \forall y \in D$, conchidem $d \le I[z^*] \le d$, adică $I[z^*] = d$.

Analog se arată că dacă $d_1 = \sup_{y\in D} I[y]$, atunci se va găsi punctul $\xi \in D$ astfel încât $I[\xi] = d_1$. ■

Remarca 1.2.7. Întrucât funcţionala continuă $I[y]$ este semicontinuă (inferior şi superior), în cazul în care MFA D este compactă, conform teoremei 1.2.5, aceasta îşi atinge marginile inferioară şi superioară.

Remarca 1.2.8. Dacă funcționala continuă $I: D \to \mathbb{R}$ este definită pe o mulțime necompactă D, atunci $\inf_{y\in D} I[y]$ şi $\sup_{y\in D} I[y]$ pot să nu se atingă.

Exemplul 1.2.9. *Să se arate că funcționala*

$$I[y(x)] = \int_0^1 y^2(x)dx,\ y(x) \in D := \left\{ y(x) \in C[0;1] \middle\| y(0) = 0,\ y(1) = 1,\ \|y(x)\|_{C[0;1]} \le 1 \right\}$$

este continuă pe D *şi nu îşi atinge pe* D *marginea inferioară.*

Simplu se poate arăta că funcționala $I[y(x)]$ este continuă pe D. Deoarece pentru $y(x) = x^n$ avem $I[y(x)] = 1/(2n+1)$, rezultă că $\inf_{y\in D} I[y(x)] = 0$. În acelaşi timp pentru orice curbă continuă $y(x)$ ce conectează punctele $(0;0)$ şi $(1;1)$ avem $I[y(x)] > 0$. Se poate arăta că mulțimea D, deşi este mărginită şi închisă, nu este compactă. ■

II. Cazul funcţionalelor convexe

Evident că ipotezele teoremei 1.2.5 sunt dificil de verificat. Vom evidenția condiții suficiente de existență (şi unicitate) ale extremelor funcționalelor convexe mai simplu de verificat. Convexitatea funcționalei $I[\bullet]: D \subset X \to \mathbb{R}$ se poate caracteriza folosind G-diferențiala acesteia. Vom arăta că elementul $y \in D$, pentru care G-diferențiala funcționalei convexe $I[y]$ se anulează, realizează un minim al funcționalei. Mai mult, atunci când $I[y]$ este funcțională strict convexă pe D, poate să existe cel mult un astfel de element $y \in D$. În continuare vom stabili rolul pe care îl are integrandul convex (convex tare) F în generarea funcționalelor de tip integral convexe (strict convexe).

Dacă $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$, atunci pentru $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^3$ are loc $\delta f(\bar{x}, \bar{y}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{y}$. Amintim că funcția f este numită convexă dacă pentru orice $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^3$ are loc

$$f(\bar{x} + \bar{y}) - f(\bar{x}) \ge \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{y} = \delta f(\bar{x}, \bar{y}), \tag{1.2.20}$$

şi se spune că este strict convexă dacă egalitatea în relația (1.2.20) are loc atunci şi numai atunci când $\bar{y} = \bar{0}$. Se observă că dacă $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$, atunci punctul $\bar{x}$ realizează un minim al lui f.

Definiția 1.2.23. Funcționala $I: D \subset X \to \mathbb{R}$ este numită convexă (strict convexă) pe D dacă pentru $y, y + \delta y \in D$ este definită G-diferențiala $\delta I[y; \delta y]$ şi are loc

$$I[y + \delta y] - I[y] \ge \delta I[y; \delta y] \tag{1.2.21}$$

(în relația 1.2.21 are loc egalitate atunci şi numai atunci când $\delta y = 0_X$).

Remarca 1.2.9. Domeniul de definiție D al funcționalei convexe poate să nu fie mulțime convexă.

Exemplul 1.2.10. *Pentru problema de extrem al funcționalei*

$$I[y(x)]=\int_1^8\left(y'^4(x)-4y\left(x\right)\right)dx,\ y(x)\in D:=\left\{y(x)\in C^1[1;8]\middle| y(1)=2,\ y(8)=-37/4\right\}$$

să se arate că integrandul este strict convex pe D şi să se afle minimul funcționalei. Să se arate că mulțimea D nu este convexă.

Teorema 1.2.6. *Dacă $I[y]$ este convexă (strict convexă) pe D, atunci fiecare $y^*\in D$ pentru care $\delta I\left[y^*;\delta y\right]=0,\ \forall y:=y^*+\delta y\in D$, realizează un minim (minim unic) al funcționalei $I[y]$ pe D.*

Demonstrație. Pentru orice $y=y^*+\delta y\in D$, conform definiției 1.2.23 avem

$$I[y]-I\left[y^*\right]=I\left[y^*+\delta y\right]-I\left[y^*\right]\geq\delta I\left[y^*;\delta y\right]=0$$

(egalitatea în ultima relația are loc dacă şi numai dacă $\delta y=0_X$). Astfel $I[y]\geq I\left[y^*\right],\ \forall y\in D$ (egalitatea are loc dacă şi numai dacă $y=y^*$). ■

Exemplul 1.2.11. *Să se arate că funcționala*

$$I[y(x)]=\int_a^b y'^2(x)dx,\ y(x)\in D:=\left\{y(x)\in C^1[a;b]\middle| y(a)=y_a,\ y(b)=y_b\right\}$$

este strict convexă pe D şi să se afle minimul funcționalei.

Variația de ordinul I este $\delta I[y(x);\delta y(x)]=2\int_a^b y'(x)\delta y'\left(x\right)dx,\ \forall y(x)\in D,\ \delta y(x)\in H_1$. Atunci, întrucât are loc $I\left[y+\delta y\right]-I\left[y\right]=\int_a^b\left(y'+\delta y'\right)^2dx-\int_a^b y'^2dx=2\int_a^b y'\delta y'dx+\int_a^b\delta y'^2dx\geq 2\int_a^b y'\delta y'dx=\delta I\left[y;\delta y\right]$, funcționala $I[y]$ este convexă pe D. Egalitatea $I[y+\delta y]-I[y]=\delta I[y;\delta y]$ are loc dacă şi numai dacă $\int_a^b\delta y'^2dx=0$, de unde rezultă că $\delta y\equiv const$. Ținând cont că $\delta y\in H_1$ deducem, că $\delta y\equiv 0$. Astfel funcționala $I[y]$ este strict convexă pe D (deşi nu este aşa pe $C^1\left[a;b\right]$). Conform teoremei 1.2.6 există cel mult un element $y\in D$ (ce satisface relația $\delta I\left[y;\delta y\right]=2\int_a^b y'\delta y'dx=0,\ \forall\delta y\in H_1$) care realizează minim al funcționalei $I[y]$ pe D. Funcția liniară $y^*\left(x\right)=\frac{y_b-y_a}{b-a}\left(x-a\right)+y_a\in D$ reprezintă unicul punct de minim al funcționalei $I[y]$ pe D. ■

Dacă $F=F(x,y,z)\in C^1\left(\Omega\right)$, unde $\Omega:=[a;b]\times\Delta_2\ \left(\left[a;b\right]\subset\mathbb{R},\ \Delta_2\subset\mathbb{R}^2\right)$, atunci funcționala $I[y(x)]=\int_a^b F\left(x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right)dx$ este G-diferențiabilă în orice punct

$$y(x)\in D:=\left\{y(x)\in C^1[a;b]\,\middle|\,(x,y(x),y'(x))\in\Omega,\ \forall x\in[a;b],\ y(a)=y_a, y(b)=y_b, y_a,y_b\in\mathbb{R}\right\}$$

şi variaţia de ordinul întâi $\delta I[y(x);\delta y(x)]$ poate fi scrisă astfel:

$$\delta I[y(x);\delta y(x)]=\int_a^b\left\{F_y\left(x,y(x),y'(x)\right)\delta y(x)+F_{y'}\left(x,y(x),y'(x)\right)\delta y'(x)\right\}dx. \tag{1.2.22}$$

Fie pentru variabila $x\in(a;b)$ fixă, funcţia $F=F(x,y,z)$ este convexă (convexă tare), adică

$$F\left(x,y(x)+\delta y(x),y'(x)+\delta y'(x)\right)-F\left(x,y(x),y'(x)\right)\geq$$

$$\geq F_y\left(x,y(x),y'(x)\right)\delta y(x)+F_{y'}\left(x,y(x),y'(x)\right)\delta y'(x),\ \forall(x,y,y'),\ (x,y+\delta y,y'+\delta y')\in\Omega \tag{1.2.23}$$

(egalitatea are loc doar pentru $\delta y\equiv 0$).

Teorema 1.2.7. *Dacă pentru variabila $x\in(a;b)$ fixă, funcţia $F=F(x,y,z)$ este convexă (convexă tare) pe Ω, atunci $I[y]$ este convexă (strict convexă) pe D.*

Demonstraţie. Întrucât are loc inegalitatea (1.2.23), integrând în ambii membri obţinem:

$$\int_a^b\left(F\left(x,y(x)+\delta y(x),y'(x)+\delta y'(x)\right)-F\left(x,y(x),y'(x)\right)\right)dx\geq$$

$$\geq\int_a^b\left\{F_y\left(x,y(x),y'(x)\right)\delta y(x)+F_{y'}\left(x,y(x),y'(x)\right)\delta y'(x)\right\}dx.$$

Ultima inegalitate implică

$$I[y+\delta y]-I[y]\geq\delta I[y;\delta y],\ y,y+\delta y\in D,$$

adică funcţionala $I:D\to\mathbb{R}$ este convexă.

Dacă pentru variabila $x\in(a;b)$ fixă funcţia F este convexă tare, atunci egalitate în relaţia (1.2.23) are loc doar pentru $\delta y\equiv 0$ sau $\delta y'\equiv 0$, deci pentru $\delta y\delta y'=\frac{1}{2}\left(\delta y^2\right)'\equiv 0$, de unde rezultă $\delta y^2(x)=const=\delta y^2(a)=0$, adică $\delta y(x)\equiv 0$. În acest caz funcţionala $I:D\to\mathbb{R}$ este strict convexă pe D. ■

Exemplul 1.2.12. *Să se arate că funcţia $y^*(x)=x^2$ realizează unicul punct de minim al funcţionalei*

$$I[y(x)]=\int_0^1\left(y'^2(x)+4y(x)\right)dx$$

pe MFA $D:=\left\{y(x)\in C^1[0;1]\,\middle|\,y(0)=0,\ y(1)=1\right\}$.

Întrucât pentru variabila $x\in(0;1)$ fixă, funcţia $F(x,y,z)=z^2+4y$ este convexă tare pe $[0;1]\times\mathbb{R}^2$, conform teoremei 1.2.7 funcţionala $I[y]$ este strict convexă pe D. Atunci, conform teoremei 1.2.6, ţinând cont că funcţia $y^*(x)=x^2\in D$ satisface condiţia

$\delta I\left[y^*;\delta y\right]=0, \forall y:=y^*+\delta y\in D$ (aici $\delta I\left[y;\delta y\right]=\int\limits_0^1\left(2y'\delta y'+4\delta y\right)dx$, iar $\delta I\left[y^*;\delta y\right]=4\int\limits_0^1\left(x\delta y'+\delta y\right)dx=$ $=4\left(x\delta y\Big|_0^1-\int\limits_0^1\delta y dx+\int\limits_0^1\delta y dx\right)=0$), rezultă că $y^*(x)=x^2$ realizează unicul minim al funcționalei $I[y]$ pe D. ■

Remarca 1.2.10. $I[y]$ poate să fie convexă (strict convexă) chiar dacă $F(x,y,z)$ nu este convexă (convexă tare).

Exemplul 1.2.13. a) *Să se arate că funcționala*

$$I[y(x)]=\int\limits_0^1 y^2(x)y'(x)dx$$

este convexă pe $D:=\left\{y(x)\in C^1[0;1]\,\middle|\,y(0)=0,\ y(1)=1\right\}$, *iar integrandul* $F(x,y,z)=y^2z$ *pentru variabila* $x\in(0;1)$ *fixă nu este funcție convexă pe* $[0;1]\times\mathbb{R}^2$.

b) *Să se arate că funcționala*

$$I[y(x)]=\int\limits_a^b\left(y'(x)+3y(x)\right)^2dx$$

este strict convexă pe $D:=\left\{y(x)\in C^1[a;b]\,\middle|\,y(a)=y_a,\ y(b)=y_b\right\}$, *iar integrandul* $F(x,y,z)=(z+3y)^2$, *pentru variabila* $x\in(0;1)$ *fixă, este doar funcție convexă pe* $[a;b]\times\mathbb{R}^2$ *(dar nu şi tare convexă).*

În general vorbind este dificil de verificat dacă funcția $F=F(x,y,z)$ este convexă (convexă tare) pe Ω. Unele rezultate ce caracterizează funcțiile convexe pot fi găsite în Anexe.