Tema 3. Diferențiale ale funcționalei

Problema 3.1. Să se afle diferențialele Gâteaux și Fréchet (de ordinul I și II) ale funcționalelor:

a) $I[y(x)] = \int\limits_a^b y^2(x)\,dx\ ; \quad y \in C[a;b]$

b) $I[y(x)] = \int\limits_0^1 (y^2(x) + y'^2(x))\,dx\ , \quad y \in \mathcal{D} := \{ y \in C^1[0;1] \mid y(0)=0,\ y(1)=1 \}$;

c) $I[y(x)] = \int\limits_{-1}^0 (12x\,y(x) - y'^2(x))\,dx\ , \quad y \in \mathcal{D} := \{ y \in C^1[-1;0] \mid y(-1)=1,\ y(0)=0 \}$;

d) $I[y(x)] = \int\limits_0^{\pi/2} (y'^2(x) - y^2(x))\,dx\ , \quad y \in \mathcal{D} := \{ y \in C^1[0;\pi/2] \mid y(0)=1,\ y(\pi/2)=0 \}$

Soluție

3.1. a)

G-diferențiala:

Să considerăm variația argumentului f-lei sub forma: $y(x) = y^*(x) + \alpha\,\delta y(x)$ $\left(\alpha \in \mathbb{R},\ \delta y(x) \in C[a;b] \text{ - fixă}\right)$, $y^* \in C[a;b]$ fix.

Def.: $\left[\ \delta I[y^*;\delta y] = \lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{I[y^* + \alpha\delta y] - I[y^*]}{\alpha} = \left(\dfrac{d}{d\alpha} I[y^* + \alpha\delta y]\right)\Big|_{\alpha=0}\right.$

I variantă: $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{I[y^*+\alpha\delta y] - I[y^*]}{\alpha} = \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\int_a^b (y^*+\alpha\delta y)^2 dx - \int_a^b y^{*2} dx}{\alpha} = \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\int_a^b (2\alpha y^*\delta y + \alpha^2\delta y^2)\,dx}{\alpha} =$

$= \lim\limits_{\alpha\to 0} \int\limits_a^b (2y^*\delta y + \alpha\,\delta y^2)\,dx = \int\limits_a^b 2y^*\delta y\,dx \ \Rightarrow\ \delta I[y^*(x);\delta y(x)] = \int\limits_a^b 2\,y^*(x)\,\delta y(x)\,dx$.

II variantă:

$\varphi(\alpha) := I[y^* + \alpha\delta y] = \int\limits_a^b (y^* + \alpha\delta y)^2\,dx$

$\varphi'(\alpha)\Big|_{\alpha=0} = \dfrac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} = \left(\int\limits_a^b 2(y^* + \alpha\delta y)\,\delta y\,dx\right)\Big|_{\alpha=0} = \int\limits_a^b 2y^*\delta y\,dx \ \Rightarrow\ \delta I[y^*;\delta y] = \varphi'(\alpha)\Big|_{\alpha=0} =$

$= \int\limits_a^b 2y^*(x)\,\delta y(x)\,dx$;

S-a utilizat formula: $\dfrac{dg(\alpha)}{d\alpha} = \int\limits_a^b \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx$, unde $g(\alpha) = \int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx \quad (f \in C^1)$

F-diferențiala:

Să considerăm variația argumentului funcționalei sub forma: $y(x) = y^*(x) + \delta y(x)$ $\quad (y^* \in C[a;b] \text{ fixă};\ \delta y \in C[a;b])$

Def. Dacă în $y^* \in \mathcal{D}$ are loc reprezentarea:

$\Delta I = I[y^* + \delta y] - I[y^*] = \underbrace{dI[y^*;\delta y]}_{\text{f-lă liniară și continuă în raport cu } \delta y} + \underbrace{dI_1[y^*;\delta y]}_{\text{satisface}}\ \underbrace{\lim\limits_{\|\delta y\|\to 0} \dfrac{dI_1[y^*;\delta y]}{\|\delta y\|} = 0}$

$\Leftrightarrow dI_1[y^*;\delta y] = \varepsilon_1[y^*;\delta y]\cdot\|\delta y\|$, $\lim\limits_{\|\delta y\|\to 0} \varepsilon_1[y^*;\delta y] = 0$.

atunci $dI[y^*;\delta y]$ - F-diferențială a f-lei $I[y]$ în p. $y^* \in \mathcal{D}$.

$\Delta I = I[y^* + \delta y] - I[y^*] = \int\limits_a^b (y^* + \delta y)^2 dx - \int\limits_a^b y^{*2} dx =$

$= \int\limits_a^b 2y^*\delta y\,dx + \int\limits_a^b \delta y^2\,dx = dI[y^*;\delta y] + dI_1[y^*;\delta y]$; $\quad (*)$

$dI_1[y^*;\delta y] = \int\limits_a^b \delta y^2\,dx = \int\limits_a^b |\delta y|^2 dx \le \int\limits_a^b \left(\max\limits_{x\in[a;b]} |\delta y(x)|\right)^2 dx = \left(\max\limits_{x\in[a;b]} |\delta y(x)|\right)^2 \cdot (b-a) = \|\delta y\|^2_{C[a;b]} \cdot (b-a)$

$\Rightarrow dI_1[y^*;\delta y] \le \varepsilon_1[y^*;\delta y]\cdot\|\delta y\|_{C[a;b]}$ unde $\varepsilon_1[y^*;\delta y] = (b-a)\cdot\|\delta y\|_{C[a;b]} \to 0$ când $\|\delta y\|_{C[a;b]} \to 0$.

$\Rightarrow \dfrac{dI_1[y^*;\delta y]}{\|\delta y\|_{C[a;b]}} = \dfrac{\int_a^b \delta y^2 dx}{\|\delta y\|_{C[a;b]}} \le \varepsilon_1[y^*;\delta y] \to 0$ când $\|\delta y\|_{C[a;b]} \to 0 \ \Rightarrow\ \lim\limits_{\|\delta y\|_{C[a;b]}\to 0} \dfrac{\delta I_1[y^*;\delta y]}{\|\delta y\|_{C[a;b]}} = 0$

$dI[y^*;\delta y] = \int\limits_a^b 2y^*(x)\,\delta y(x)\,dx$ - f-lă liniară și continuă (vezi mai jos) în rap. cu $\delta y \in C[a;b]$:

f-lă liniară: $dI[y^*;\alpha_1\delta y_1 + \alpha_2\delta y_2] = \alpha_1\,dI[y^*;\delta y_1] + \alpha_2\,dI[y^*;\delta y_2]$, $\forall \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\forall \delta y_1, \delta y_2 \in C[a;b]$.

Fie $\widetilde{\delta y} \in C[a;b]$ arbitrar. Orice funcție $\delta y \in C[a;b]$ ce satisface condiția $\|\delta y - \widetilde{\delta y}\|_{C[a;b]} < \delta$ $(\delta > 0)$ va satisface și condiția: $|\delta y(x) - \widetilde{\delta y}(x)| < \delta$, $\forall x \in [a;b]$. Atunci avem:

$$|dI[y^*;\delta y] - dI[y^*;\widetilde{\delta y}]| = 2\cdot\left|\int_a^b (y^*\delta y - y^*\widetilde{\delta y})dx\right| \le 2\cdot\int_a^b |y^*|\cdot|\delta y - \widetilde{\delta y}|dx \le$$

$$\le 2\delta\cdot\underbrace{\int_a^b |y^*|dx}_{\ge 0,\ = c} = 2c\delta.$$

Oricare ar fi $\varepsilon > 0$, alegând $\delta = \varepsilon/2c$, avem $|dI[y^*;\delta y] - dI[y^*;\widetilde{\delta y}]| \le \varepsilon$, adică f-la $dI[y^*;\delta y]$ este continuă în $\widetilde{\delta y}(x) \in C[a;b]$ în sensul normei din $C[a;b]$.

Întrucât $\widetilde{\delta y} \in C[a;b]$ este arbitrar ales $\Rightarrow$ $dI[y^*;\delta y]$ - continuă pe $C[a;b]$ în raport cu δy.

$\Rightarrow$ În condițiile menționate mai sus, f-la $dI[y^*;\delta y] = \int_a^b 2y^*(x)\delta y(x)dx$ reprezintă F-diferențiala f-lei $I[y(x)]$ p. $y^* \in C[a;b]$.

G-diferențiala de ordinul II:

Def.: $\delta^2 I[y^*;\delta y] = \left.\dfrac{d^2 I[y^*+\alpha\delta y]}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0}$;

$\varphi(\alpha) := I[y^*+\alpha\delta y]$; $\varphi'(\alpha) = 2\int_a^b (y^*+\alpha\delta y)\delta y\,dx$;

$\varphi''(\alpha) = 2\int_a^b \delta y^2 dx$; $\delta^2 I[y^*;\delta y] = \varphi''(\alpha)|_{\alpha=0} = 2\cdot\int_a^b \delta y^2(x)\,dx$

F-diferențiala de ord. II:

Def.: $I[y]$ - de 2 ori F-diferențiabilă d/c

$$\Delta I = \underbrace{dI[y^*;\delta y]}_{\text{f-la liniară și cont. în } \delta y} + \frac{1}{2}\underbrace{d^2 I[y^*;\delta y]}_{\text{f-lă pătratică în } \delta y \ \Downarrow\ \text{F-diferențiala de ord. II}} + \underbrace{dI_2[y^*;\delta y]}_{\lim\limits_{\|\delta y\|\to 0}(dI_2[y^*;\delta y]/\|\delta y\|^2) = 0}$$

Relația (*) $\Rightarrow$ $\Delta I = \int_a^b 2y^*\delta y\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b 2\delta y^2\,dx$

$\Rightarrow$ $dI_2[y^*;\delta y] = 0$; $\underbrace{dI[y^*;\delta y] = \int_a^b 2y^*\delta y\,dx}_{\text{f-la liniară și cont. în } \delta y}$; $\underbrace{d^2 I[y^*;\delta y] = \int_a^b 2\delta y^2 dx}_{\text{f-lă pătratică în } \delta y}$;

$\Rightarrow$ F-diferențiala de ord. II este: $d^2 I[y^*;\delta y] = 2\int_a^b \delta y^2(x)\,dx$.

3.1 b) G-diferențiala:

$$y^* \in \mathcal{D} := \{y \in C^1[0;1] \mid y(0) = 0,\ y(1) = 1\}$$

$y \in \mathcal{D}$: $y = y^* + \alpha\delta y$ $(\alpha \in \mathbb{R}$, δy fix $\in C^1[0;1])$

$\varphi(\alpha) := I[y^*+\alpha\delta y] = \int_0^1 \left((y^*+\alpha\delta y)^2 + (y^{*\prime}+\alpha\delta y')^2\right)dx$

$\varphi'(\alpha) = \int_0^1 \left(2(y^*+\alpha\delta y)\delta y + 2(y^{*\prime}+\alpha\delta y')\cdot\delta y'\right)dx$;

$\delta I[y^*;\delta y] = \varphi'(\alpha)|_{\alpha=0} = \int_0^1 (2y^*\delta y + 2y^{*\prime}\delta y')dx$ — G-diferențiala f-lei $I[y]$.

F-diferențiala: $\Delta I = I[y^*+\delta y] - I[y^*]$, unde $y^* \in \mathcal{D}$; $\delta y \in C^1[0;1]$: $y^*+\delta y \in \mathcal{D}$.

$\Rightarrow \Delta I = \int_0^1 \left((y^*+\delta y)^2 + (y^{*\prime}+\delta y')^2\right)dx - \int_0^1 (y^{*2}+y^{*\prime 2})dx = \int_0^1 (2y^*\delta y + 2y^{*\prime}\delta y')dx + \int_0^1 (\delta y^2 + \delta y'^2)dx =$

$= dI[y^*;\delta y] + dI_1[y^*;\delta y]$;

Avem

$dI_1[y^*;\delta y] = \underbrace{\int_0^1 (\delta y^2 + \delta y'^2)dx}_{\ge 0} = \int_0^1 (|\delta y|^2 + |\delta y'|^2)dx \le \int_0^1 \left((\max\limits_{x\in[0;1]}|\delta y|)^2 + (\max\limits_{x\in[0;1]}|\delta y'|)^2\right)dx \le$

$\le \int_0^1 (\max|\delta y| + \max|\delta y'|)^2 dx \le \|\delta y\|^2_{C^1[0;1]}$

$\Rightarrow \dfrac{dI_1[y^*;\delta y]}{\|\delta y\|_{C^1[0;1]}} \le \|\delta y\|_{C^1[0;1]} \to 0$ când $\|\delta y\|_{C^1[0;1]} \to 0$ $\Rightarrow \lim\limits_{\|\delta y\|_{C^1[0;1]}\to 0} \dfrac{dI_1[y^*;\delta y]}{\|\delta y\|_{C^1[0;1]}} = 0$

$$dI[y^*;\delta y] = \int_0^1 (2y^*\delta y + 2y^{*\prime}\delta y')\,dx \;;$$

$dI[y^*;\delta y]$ - f. la liniară în raport cu δy : $dI[y^*;\alpha_1\delta y_1+\alpha_2\delta y_2] = \alpha_1 dI[y^*;\delta y_1] + \alpha_2 dI[y^*;\delta y_2]$

Fie $\widetilde{\delta y} \in C^1[0;1]$, $\quad = \max|\delta y(x)-\widetilde{\delta y}(x)| + \max|\delta y'(x) - \widetilde{\delta y}'(x)|$

$\forall\, \delta y \in C^1[0;1]$: $\|\delta y - \widetilde{\delta y}\|_{C^1[0;1]} < \delta \quad (\delta > 0)$

$\Rightarrow |\delta y(x) - \widetilde{\delta y}(x)| < \delta$, $\forall x \in [0;1]$ și $|\delta y'(x) - \widetilde{\delta y}'(x)| < \delta$, $\forall x \in [0;1]$.

$$\Rightarrow \left|dI[y^*;\delta y] - dI[y^*;\widetilde{\delta y}]\right| = \left|\int_0^1 (2y^*\delta y + 2y^{*\prime}\delta y')\,dx - \int_0^1 (2y^*\widetilde{\delta y} + 2y^{*\prime}\widetilde{\delta y}')\,dx\right| \le$$

$$\le 2\cdot\int_0^1 |y^*|\cdot|\delta y - \widetilde{\delta y}|\,dx + 2\cdot\int_0^1 |y^{*\prime}|\cdot|\delta y' - \widetilde{\delta y}'|\,dx \le 2\delta\cdot\underbrace{\Big(\underbrace{\int_0^1 |y^*|\,dx}_{\le c_1} + \underbrace{\int_0^1 |y^{*\prime}|\,dx}_{\le c_2}\Big)}_{c_1+c_2=c} \le 2c\delta$$

$\forall\, \varepsilon > 0$ alegem $\delta = \varepsilon/2c \Rightarrow \left|dI[y^*;\delta y] - dI[y^*;\widetilde{\delta y}]\right| \le \varepsilon$

$\Rightarrow$ f. la $dI[y^*;\delta y]$ - continuă în $\widetilde{\delta y}(x) \in C^1[0;1]$ în sensul normei din $C^1[0;1]$

Dacă $\widetilde{\delta y} \in C^1[a;b]$ (a.î. $y^* + \widetilde{\delta y} \in \mathcal{D}$) este arbitrar ales $\Rightarrow dI[y^*;\delta y]$ - continuă pe $C^1[0;1]$ în raport cu δy

Astfel, în baza celor menționate mai sus, f-la $dI[y^*;\delta y] = \int_0^1 (2y^*\delta y + 2y^{*\prime}\delta y')\,dx$ reprezintă F-diferențiala f-lei $I[y(x)]$ în p. $y^* \in \mathcal{D}$.

G-diferențiala de ord. II ;

$$\delta^2 I[y^*;\delta y] = \varphi''(\alpha)\big|_{\alpha=0}, \text{ unde } \varphi(\alpha) = I[y^* + \alpha\delta y] \;;$$

$$\varphi'(\alpha) = \int_0^1 \left(2(y^* + \alpha\delta y)\delta y + 2(y^{*\prime} + \alpha\delta y')\cdot\delta y'\right)dx \;,$$

$$\varphi''(\alpha) = \int_0^1 (2\delta y^2 + 2\delta y'^2)\,dx \Rightarrow \delta^2 I[y^*;\delta y] = \varphi''(\alpha)\big|_{\alpha=0} = 2\cdot\int_0^1 (\delta y^2 + \delta y'^2)\,dx \;;$$

F-diferențiala de ord. II :

Amintim că : $$\Delta I = \underbrace{\int_0^1 (2y^*\delta y + 2y^{*\prime}\delta y')\,dx}_{\text{f-lă lin. și cont. în } \delta y \text{ în norma lui } C^1[0;1]} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 2(\delta y^2 + \delta y'^2)\,dx}_{\text{f-la pătratică în } C^1[0;1]} + \overset{d I_2[y^*;\delta y]}{O}$$

$$\Rightarrow d^2 I[y^*;\delta y] = 2\int_0^1 (\delta y^2 + \delta y'^2)\,dx \text{ — F-diferențiala de ordinul II.}$$

c) și d) pt. acasă!

Tema 4.

Să considerăm problema elementară de calcul variațional (PECV):

$$\text{PECV}: \begin{cases} I[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\,dx \to \text{extr} \\ y(a) = y_a \;;\; y(b) = y_b \\ y(x) \in C^1[a;b] \;;\; F(x,y,y') \in C^2 \text{ în raport cu fiecare variabilă} \end{cases}$$

Vom utiliza următorul algoritm în calculul punctelor staționare ale f-lei $I[y]$ pe mulțimea f-lor admisibile $\mathcal{D}$, definită de PECV:

1⁰. Se calculează $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$, $F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}$, $\frac{d}{dx} F_{y'} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$ și se scrie ecuația Euler–Lagrange: $F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0$.

Dacă funcția $F(x,y,y')$ corespunde cărui va caz particular în care sunt cunoscute integralele prime ale ec. E–L, se utilizează relațiile respective cunoscute.

2⁰. Se află soluția generală a ec. E–L $y = y(x, C_1, C_2)$, unde C_1 și C_2 sunt constante arbitrare.

3⁰. Se calculează constantele C_1 și C_2 din condițiile pe frontieră, rezolvând sistemul

$$\begin{cases} y(a, C_1, C_2) = y_a \\ y(b, C_1, C_2) = y_b \end{cases}$$

În rezultat se obține extremala $y^*(x)$ (punctul staționar al f-lei) care posibil că realizează un extrem al f-lei.

Problema 4.1. Să se afle extremala (punctul staționar) funcționalei $I[y(x)]$ ce satisface condițiile pe frontieră $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ (pe mulțimea f-lor admisibile $\mathcal{D} := \{y(x) \in C^1[a;b] \mid y(a) = y_a, y(b) = y_b\}$). Funcționala $I[y(x)]$ și extremitățile a și b sunt definite mai jos:

a) $I[y(x)] = \int_0^1 \left(y^2(x) + y'^2(x)\right)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=1$;

b) $I[y(x)] = \int_{-1}^0 \left(12x\,y(x) - y'^2(x)\right)dx$, $y(-1)=1$, $y(0)=0$;

c) $I[y(x)] = \int_0^{\pi/2} \left(y'^2(x) - y^2(x)\right)dx$, $y(0)=1$, $y(\pi/2)=0$;

d) $I[y(x)] = \int_0^1 \left(4y(x) - y'^2(x) + 12x\,y'(x)\right)dx$, $y(0)=1$, $y(1)=4$;

e) $I[y(x)] = \int_0^{\ln 2} \left(y'^2(x) + 2y^2(x) + 2y(x)\right)e^{-x}dx$, $y(0)=0$, $y(\ln 2)=0$;

f) $I[y(x)] = \int_0^1 \left(y^2(x) + y'^2(x) + 2y(x)e^x\right)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=0$;

g) $I[y(x)] = \int_1^2 \left(3x\,y'^5(x) - 5y(x)\,y'^4(x)\right)dx$, $y(1)=1$, $y(2)=4$;

h) $I[y(x)] = \int_0^{\pi/18} \left(y'^2(x) - 37y(x)y'(x) - 81y^2(x)\right)dx$, $y(0)=1$, $y(\pi/18)=-1$;

i) $I[y(x)] = \int_0^2 \left(y'^2(x) + x\,y'(x)\right)dx$, $y(0)=0$, $y(2)=0$;

j) $I[y(x)] = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{x}dx$, $y(1)=3+\sqrt{3}$, $y(2)=3$;

k) $I[y(x)] = \int_0^2 \left(y'^4(x) + y'^3(x)\right)dx$, $y(0)=0$, $y(2)=4$;

l) $I[y(x)] = \int_1^3 \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$, $y(1)=2$, $y(3)=0$;

m) $I[y(x)] = \int_1^2 \left(y^2(x) + y(x)\right)dx$, $y(1)=0$, $y(2)=1$;

n) $I[y(x)] = \int_a^b \left(y^2(x) + 2xy(x)\right)dx$, $y(a)=y_a$, $y(b)=y_b$; $(a,b\in\mathbb{R}, a<b)$

o) $I[y(x)] = \int_0^2 \left(y^2(x) + xy'(x)\right)dx$, $y(0)=0$, $y(2)=1$;

p) $I[y(x)] = \int_0^1 \left(2y^3(x) + 3x^2y'(x)\right)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=y_b$;

q) $I[y(x)] = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(y^2(x)\cos x + 2y(x)y'(x)\sin x\right)dx$, $y(\pi/6)=1$, $y(\pi/2)=2$;

r) $I[y(x)] = \int_0^1 y(x)\cdot y'^2(x)\,dx$, $y(0)=1$, $y(1)=\sqrt[3]{4}$;

s) $I[y(x)] = \int_{-4}^4 \sqrt{y(x)\left(1+y'^2(x)\right)}\,dx$, $y(-4)=5$, $y(4)=5$;

t) $I[y(x)] = \int_0^1 y'^2(x)\,dx$, $y(0)=0$, $y(1)=1$;

u) $I[y(x)] = \int_0^1 \left(xy'(x) - y'^2(x)\right)dx$, $y(0)=1$, $y(1)=1/4$;

v) $I[y(x)] = \int_2^7 \left(\cos x + 3x^2y(x) + (x^3 - y^2(x))y'(x)\right)dx$, $y(2)=3$, $y(7)=0$;

w) $I[y(x)] = \int_1^2 \left(y(x)\cdot x^2 - y(x) + xy^2(x)\cdot y'(x)\right)dx$, $y(1)=0$, $y(2)=\sqrt{3}$;

x) $I[y(x)] = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(3x^2y^2(x) + \cos y(x) + y'(x)\cdot\left(2x^3y(x) - x\sin y(x)\right)\right)dx$, $y(\pi/4)=0$; $y(\pi/2)=1$;

y) $I[y(x)] = \int_a^b \left(2xy(x) + (x^2 + e^{y(x)})y'(x)\right)dx$, $y(a)=A$, $y(b)=B$;

z) $I[y(x)] = \int_0^1 \left(e^{y(x)} + xy'(x)\right)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=\alpha$.

Rezolvare:

a) $I[y(x)]=\int_0^1\left(y^2(x)+y'^2(x)\right)dx$, $y(0)=0$, $y(1)=1$.

Avem $F(x,y,y')=y^2(x)+y'^2(x)$; $F_y=2y(x)$; $F_{y'}=2y'(x)$; $\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)=2y''(x)$.

At. ec. E-L se scrie sub forma: $F_y-\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)=0 \Leftrightarrow 2y(x)-2y''(x)=0 \Leftrightarrow y''(x)-y(x)=0$

Ec. dif. obținută este cu derivate ordinare, liniară, omogenă (membrul drept este funcția nulă), cu coeficienți constanți.

Scriem ecuația caracteristică: $\lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda_1=1$; $\lambda_2=-1$

Avem $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, $\lambda_1\neq\lambda_2$ și în acest caz soluția generală y_{SGEO} are forma:

$$y_{SGEO}(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}=C_1e^{x}+C_2e^{-x}.$$

Determinăm constantele C_1 și C_2 din condițiile pe frontieră:

$$\begin{cases}y(0)=0\\ y(1)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1+C_2=0\\ C_1e+C_2e^{-1}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=-C_2\\ C_2=\dfrac{1}{e^{-1}-e}=\dfrac{e}{1-e^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=\dfrac{e}{e^2-1}\\ C_2=\dfrac{e}{1-e^2}\end{cases}$$

În fine, obținem extremala $\boxed{y^*(x)=\dfrac{e}{e^2-1}\cdot e^{x}+\dfrac{e}{1-e^2}\cdot e^{-x}}$.

b) $I[y(x)]=\int_{-1}^{0}\left(12xy(x)-y'^2(x)\right)dx$, $y(-1)=1$, $y(0)=0$.

$y\equiv y(x)$; $y'\equiv y'(x)$

$F(x,y,y')=12xy-y'^2$; $F_y=12x$; $F_{y'}=-2y'$; $\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)=-2y''$

$\Rightarrow$ ec. E-L: $F_y-\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)=0 \Leftrightarrow 12x-(-2y'')=0 \Leftrightarrow y''(x)=-6x$.

Sol. generală a ec. E-L o vom găsi integrând de două ori ambii membri ai ec. $y''(x)=-6x$.

$\Rightarrow \int y''(x)dx=\int(-6x)dx \Rightarrow y'(x)=-3x^2+C_1 \Rightarrow \int y'(x)dx=\int\left(-3x^2+C_1\right)dx \Rightarrow$

$\Rightarrow y(x)=-x^3+C_1x+C_2$.

Determinăm coef. C_1 și C_2 din cond. pe frontieră:

$$\begin{cases}y(-1)=1\\ y(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-C_1+C_2=1\\ C_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=0\\ C_2=0\end{cases}$$

În rezultat obținem extremala $\boxed{y^*(x)=-x^3}$

Examină!

c) $I[y(x)]=\int_0^{\pi/2}\left(y'^2(x)-y^2(x)\right)dx$, $y(0)=1$, $y(\pi/2)=0$.

$F(x,y,y')=y'^2-y^2$; $\frac{\partial F}{\partial y}=-2y$; $\frac{\partial F}{\partial y'}=2y'$; $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=2y''$;

$\Rightarrow$ ec. E-L: $-2y-2y''=0 \Leftrightarrow y''+y=0 \Rightarrow$ EDLO cu coef. constanți

ec. caract.: $\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm i=\alpha\pm\beta i \Rightarrow \alpha=0;\ \beta=1$.

$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ (conjugate) $\Rightarrow$ SGEO: $y_{SGEO}(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$

Determinăm coef. C_1 și C_2 din cond. pe frontieră: $\begin{cases}y(0)=1\\ y(\pi/2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=1\\ C_2=0\end{cases}$

Astfel obținem extremala $\boxed{y^*(x)=\cos x}$

temă **d)** $I[y(x)]=\int_0^1\left(4y(x)-y'^2(x)+12x\,y'(x)\right)dx,\; y(0)=1,\; y(1)=4.$

$F(x,y,y')=4y-y'^2+12xy'\;;\quad \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$

$\frac{\partial F}{\partial y}=4\;;\quad \frac{\partial F}{\partial y'}=-2y'+12x\;;\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=-2y''+12$

$\Rightarrow$ ec. E-L. : $4-(-2y''+12)=0 \Leftrightarrow y''=4 \Rightarrow y'=4x+C_1 \Rightarrow y(x)=2x^2+C_1x+C_2$.

Determinăm coef. C_1 și C_2 din cond. pe frontieră:

$\begin{cases} y(0)=1 \\ y(1)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2=1 \\ 2+C_1+C_2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y^*(x)=2x^2+x+1}$ – extremala

e) $I[y(x)]=\int_0^{\ln 2}\left(y'^2(x)+2y^2(x)+2y(x)\right)e^{-x}dx,\; y(0)=0,\; y(\ln 2)=0.$

$F(x,y,y')=(y'^2+2y^2+2y)e^{-x}\;;\quad \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0.$

$\frac{\partial F}{\partial y}=(4y+2)e^{-x}\;;\quad \frac{\partial F}{\partial y'}=2y'\cdot e^{-x}\;;\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=2e^{-x}\cdot y''-2y'e^{-x}\;;$

$\Rightarrow$ ec. E-L : $(4y+2)e^{-x}-(2e^{-x}y''-2e^{-x}y')=0 \overset{e^{-x}\neq 0}{\Longleftrightarrow} y''-y'-2y=1$ – EDL Neomogenă

Rezolvăm mai întâi ec. omogenă: $y''-y'-2y=0$. Ec. caract.: $\lambda^2-\lambda-2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=2\\ \lambda_2=-1\end{cases}\;;\quad \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\; \lambda_1\neq\lambda_2 \Rightarrow$ SGenerală a ELO este

$y_{SGEO}(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}.$

Întrucât numărul 0 nu este rădăcină a ec. caract., vom căuta soluția particulară a ENeomogene sub forma $y_{SPIN}(x)=A$. Substituind pe aceasta în ec. neom., obținem:

$y''_{SPIN}-y'_{SPIN}-2y_{SPIN}=1 \Leftrightarrow -2A=1 \Rightarrow A=-\frac{1}{2}.$

At. sol. generală a ec. neomogene se va scrie ca suma soluției generale a ec. omog. și a sol. part. a ec. neom.

$y_{SGEN}(x)=y_{SGEO}(x)+y_{SPEN}(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}$

Determinăm constantele C_1 și C_2 din cond. pe frontieră:

$\begin{cases} y_{SGEN}(0)=0 \\ y_{SGEN}(\ln 2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1+C_2-\frac{1}{2}=0 \\ 4C_1+\frac{C_2}{2}-\frac{1}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=\frac{1}{2}-C_2 \\ 2-4C_2+\frac{C_2}{2}-\frac{1}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=\frac{1}{14} \\ C_2=\frac{3}{7} \end{cases}$

Prin urmare, obținem extremala $\boxed{y^*(x)=\frac{1}{14}e^{2x}+\frac{3}{7}e^{-x}-\frac{1}{2}}$.

1) seminar **f)** $I[y(x)]=\int_0^1\left(y^2(x)+y'^2(x)+2y(x)e^{x}\right)dx,\; y(0)=0,\; y(1)=0$

$F(x,y,y')=y^2+y'^2+2y\cdot e^{x},\quad \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0.$

$\frac{\partial F}{\partial y}=2y+2e^{x}\;;\quad \frac{\partial F}{\partial y'}=2y'\;;\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=2y''\;;$

$2y+2e^{x}-2y''=0 \Leftrightarrow y''-y=e^{x}$ – EDLN cu coef. constanți

Rezolvăm EDLO: $y''-y=0$; ec. caract. $\lambda^2-1=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=-1\end{cases}$

$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\; \lambda_1\neq\lambda_2 \Rightarrow$ Sol. Gen. a EDLO: $y_{SGEO}(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$.

D/ce numărul 1 este răd. a ec. caract. de multipl. 1,
Soluția particulară a EDLN o vom căuta sub forma: $y_{SPEN}(x)=Axe^{x}$, $A\in\mathbb{R}$.
Înlocuim $y_{SPEN}(x)$ în EDLN: $(y'(x)=Ae^{x}+Axe^{x}\ ;\ y''(x)=2Ae^{x}+Axe^{x})$
$$2Ae^{x}+\cancel{Axe^{x}}-\cancel{Axe^{x}}\equiv e^{x} \Rightarrow 2A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2}.$$
$$\Rightarrow y_{SPEN}(x)=\frac{1}{2}xe^{x} \models y_{SGEN}(x)=y_{SGEO}(x)+y_{SPEN}(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}xe^{x}$$
utilizând condițiile pe frontieră, aflăm constantele C_1 și C_2!
$$\begin{cases} y(0)=0\\ y(1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1+C_2=0\\ C_1e+\frac{C_2}{e}+\frac{1}{2}e=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=-C_2\\ C_2\left(\frac{1}{e}-e\right)=-\frac{1}{2}e\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=\dfrac{\frac{1}{2}e^2}{1-e^2}\\ C_2=\dfrac{-\frac{1}{2}e^2}{1-e^2}\end{cases}$$
$$\Rightarrow \boxed{y^*(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{1-e^2}\cdot e^{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{1-e^2}\cdot e^{-x}+\frac{1}{2}xe^{x}} \text{ - extremala}$$

g) $I[y(x)]=\int_1^2\left(3xy'^5(x)-5y(x)y'^4(x)\right)dx$, $y(1)=1$, $y(2)=4$

$$F(x,y,y')=3xy'^5(x)-5y(x)y'^4(x)\ ;\quad \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=-5y'^4(x)\ ;\quad \frac{\partial F}{\partial y'}=15xy'^4(x)-20y(x)y'^3(x)\ ;$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=15y'^4(x)+15x\cdot 4\cdot y'^3(x)\cdot y''(x)-20y'^4(x)-20y(x)\cdot 3y'^2(x)\cdot y''(x)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=-5y'^4+5y'^4-60xy'^3\cdot y''+60y\cdot y'^2\cdot y''=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y'^2=0\\ y''=0\\ xy'-y=0\end{array}\right.$$

- $y'^2(x)=0 \Rightarrow y(x)=C$ $(C=\text{const})$ $\Rightarrow$ dreptele acestei familii nu aparțin clasei curbelor admisibile întrucât nu satisfac cond. pe frontieră.
- $y''(x)=0 \Rightarrow y'(x)=C_1 \Rightarrow y(x)=C_1x+C_2$
- $xy'-y=0$ - ec. dif. ord. în variabile separabile $\models x\frac{dy}{dx}-y=0 \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y(x)|=\ln|x|+\ln C_3$

$\Rightarrow y(x)=C_3x \Rightarrow$ dar această familie se include în familia $y(x)=C_1x+C_2$.

$\models$ soluția generală a ec. E-L este $y(x)=C_1x+C_2$
Constantele C_1 și C_2 le aflăm utilizând cond. pe frontieră:
$$\begin{cases} y(1)=1\\ y(2)=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1+C_2=1\\ 2C_1+C_2=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=3\\ C_2=-2\end{cases} \Rightarrow \boxed{y^*(x)=3x-2} \text{ - extremala.}$$

p/u aceasta **h)** $I[y(x)]=\int_0^{\pi/18}\left(y'^2(x)-37y(x)\cdot y'(x)-81y^2(x)\right)dx$, $y(0)=1$, $y(\pi/18)=-1$

$$F=y'^2-37y\cdot y'-81y^2\ ;\ \frac{\partial F}{\partial y}=-37y'-162y\ ;\ \frac{\partial F}{\partial y'}=2y'-37y\ ;\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=2y''-37y'\ ;$$
Ec. E-L: $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \Leftrightarrow -37y'-162y-2y''+37y'=0 \Leftrightarrow y''+81y=0$ - EDLO cu coef. const.
Ec. caract.: $\lambda^2+81=0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2}=\pm 9i=\alpha\pm\beta i \models \alpha=0\ ;\ \beta=9\ ;\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}\ ;\ \lambda_1\neq\lambda_2$
$\Rightarrow$ SG EO: $y(x)=C_1\cos 9x+C_2\sin 9x$.
Calculăm coef. C_1 și C_2 din cond. pe frontieră:
$$\begin{cases} y(0)=1\\ y(\pi/18)=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=1\\ C_2=-1\end{cases} \Rightarrow \boxed{y^*(x)=\cos 9x-\sin 9x} \text{ - extremală}$$

2) ~~seminar~~ b) $I[y(x)] = \int_0^2 \left(y'^2(x) + x y'(x)\right)dx$, $y(0)=0$, $y(2)=0$

I varianta de rezolvare: abordarea nemijlocită prin intermediul ec. E-L.

$F = y'^2 + xy'$; $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' + x$; $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2y'' + 1$;

Ec. E-L : $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \Leftrightarrow 0 - (2y''+1) = 0 \Leftrightarrow y'' = -\frac{1}{2} \Rightarrow y'(x) = -\frac{1}{2}x + C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y(x) = -\frac{1}{4}x^2 + C_1 x + C_2$.

$\begin{cases} y(0)=0 \\ y(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ -1 + 2C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y^*(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x}$ - extremala

II varianta de rezolvare: Integrandul F este de forma specială pentru care se cunosc integrale prime ale ec. E-L.

Integrandul $F = y'^2 + xy' = F(x, y')$ nu depinde în mod explicit de funcția necunoscută $y(x) \Rightarrow$ cazul 4)

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F(x,y')}{\partial y'} \overset{\text{integrala impulsului}}{=} C_1 \Rightarrow 2y' + x = C_1 \Rightarrow y'(x) = \frac{C_1}{2} - \frac{x}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y(x) = \frac{C_1}{2}x - \frac{x^2}{4} + C_2$

$\begin{cases} y(0)=0 \\ y(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 - 1 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y^*(x) = \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{4}}$ - extremala.

Prima metodă s-a redus la rezolv. unei ec. dif. ordinare de ordinul 2, iar a doua metodă a necesitat rezolv. unei EDO de ord. I. Însă procesul de rezolvare a fiecărei EDO menționate nu a implicat dificultăți.

<u>Să revenim acum la problema 4.1 c), rezolvată mai sus nemijlocit utilizând ec. E-L.</u>
<u>Să o rezolvăm ținând cont că F este de formă specială:</u>

3) seminar c) Integrandul $F = y'^2 - y^2 = F(y, y')$ nu depinde în mod explicit de variabila x, prin urmare, pentru ec. E-L se cunoaște integrala primă (cazul 3):

$I[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2(x) - y^2(x))dx$, $y(0)=1$; $y(\pi/2)=0$

$$y' \cdot \frac{\partial F(y,y')}{\partial y'} - F(y,y') = C$$

$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$; $\Updownarrow$ $y' \cdot 2y' - y'^2 + y^2 = C \Leftrightarrow y'^2 + y^2 = C = C_1^2$. - ED neliniară

Pentru a găsi soluția generală facem schimbul de variabile:

$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = \tau \Rightarrow dx = \frac{dy}{\tau}$

$\Rightarrow y^2 = C_1^2 - \tau^2 \Rightarrow y = \sqrt{C_1^2 - \tau^2} \Rightarrow dy = -\frac{\cancel{2}\tau}{\cancel{2}\sqrt{C_1^2-\tau^2}}d\tau$

$\Rightarrow dx = \frac{dy}{\tau} = -\frac{d\tau}{\sqrt{C_1^2 - \tau^2}} \Rightarrow \int dx = \int\left(-\frac{d\tau}{\sqrt{C_1^2 - \tau^2}}\right) \Rightarrow x = -\arcsin\frac{\tau}{C_1} + C_2$

$\Rightarrow \arcsin\frac{\tau}{C_1} = C_2 - x \Rightarrow \frac{\tau}{C_1} = \sin(C_2 - x) \Rightarrow \tau = C_1 \sin(C_2 - x) \Rightarrow y(x) = \sqrt{C_1^2 - \tau^2} =$

$= C_1 \cdot \sqrt{1 - \sin^2(C_2 - x)} = C_1 \cdot \sqrt{\cos^2(C_2 - x)} = C_1 \cos(C_2 - x)$

$\Rightarrow y(x) = C_1 \cdot \cos(C_2 - x)$ - sol. gener. a ec. E-L.

Determinăm coef. C_1 și C_2 din cond. pe frontieră:

$\begin{cases} y(0)=1 \\ y(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 \cos C_2 = 1 \\ C_1 \cos(C_2 - \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 \cos C_2 = 1 \\ C_1 \neq 0 \\ \cos(C_2 - \frac{\pi}{2}) = 0 \Leftrightarrow \sin C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \begin{cases} 1, & k=0 \cup k\text{-par} \\ -1, & k\text{-impar} \end{cases} \\ C_2 = k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \cup \{0\} \end{cases}$

$\Rightarrow y^*(x) = C_1 \cos(C_2 - x) = C_1 \cos(k\pi - x) = \begin{cases} \cos x, & k=0 \cup k\text{-par} \\ -(-\cos x), & k\text{-impar} \end{cases} \Rightarrow \boxed{y^*(x) = \cos x}$ - extremala

Astfel pentru această problemă aplicarea nemijlocită a ec. E-L. se reduce la o ec. dif., rezolvarea căreia este esențial mai simplă.

4) $I[y(x)] = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{x}\,dx$, $y(1)=3+\sqrt{3}$; $y(2)=3$.

Un exemplu în care utilizarea nemijlocită a ec. E-L implică dificultăți esențiale și de aceea este necesar să se țină cont că funcția F nu depinde de $y(x)$.

$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} = F(x, y')$ => nu depinde în mod explicit de $y(x)$ => cazul 4)

=> integrala primă $\frac{\partial F}{\partial y'} = C = const \iff \frac{1}{2x}\cdot\frac{2y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C = \frac{1}{C_1}$

Determinăm SG (sol. gen.) a ultimei ec. dif. (încercăm să rezolvăm în rap. cu y')

$$\Rightarrow \frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{C_1} \Rightarrow \frac{C_1 y'}{\sqrt{1+y'^2}} = x$$

Facem substituția: $y'(x) = \frac{dy}{dx} = tg\tau$

$$\Rightarrow x = \frac{C_1 tg\tau}{\sqrt{1+tg^2\tau}} = \frac{C_1 tg\tau}{\frac{1}{\cos\tau}} = C_1\sin\tau.$$

$$dx = C_1\cos\tau\, d\tau$$

$$dy = tg\tau\, dx = (tg\tau)\cdot(C_1\cos\tau)d\tau = C_1\sin\tau\, d\tau;$$

$$\Rightarrow \int dy = \int C_1\sin\tau\, d\tau \Rightarrow y = -C_1\cos\tau + C_2$$

$$\begin{cases} x = C_1\sin\tau \\ y = C_2 - C_1\cos\tau \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_1\sin\tau \\ y - C_2 = -C_1\cos\tau \end{cases}$$

Vom ridica la pătrat ambii membri ai fiecărei ecuații a sistemului, iar apoi vom aduna ec. obț.

$$x^2 + (y-C_2)^2 = C_1^2\sin^2\tau + C_1^2\cos^2\tau = C_1^2$$ - sol. ec. E-L. sub formă implicită

Determinăm coef. C_1 și C_2, utilizând cond. pe frontieră:

$$\begin{cases} y(1) = 3+\sqrt{3} \\ y(2) = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + (3+\sqrt{3}-C_2)^2 = C_1^2 \\ 4 + (3-C_2)^2 = C_1^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + (3+\sqrt{3}-C_2)^2 = 4 + (3-C_2)^2 \\ 4 + (3-C_2)^2 = C_1^2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \cancel{3} - 2\sqrt{3}\cdot(3-C_2) - \cancel{3} = 0 \\ 4 + (3-C_2)^2 = C_1^2 \end{cases} \iff \begin{cases} C_2 = 3 \\ C_1^2 = 4 \end{cases}$$

=> $y^*(x)$ - extremala sub forma:

$$x^2 + (y^*(x) - 3)^2 = 4$$

Întrucât $y(1) = 3+\sqrt{3}$ => $y^*(1) - 3 = \sqrt{3} > 0$ => extremala este: $y^*(x) = 3 + \sqrt{4-x^2}$, $x \in [1; 2]$

Aplicarea nemijlocită a ec. E-L conduce la următoarele:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0;\ \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{2y'(x)}{2x\sqrt{1+y'^2(x)}};\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{1}{x}\cdot\frac{y''\sqrt{1+y'^2} - y'\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2}$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\cdot\left(-\frac{y'}{x} + \frac{y''\cdot(1+\cancel{y'^2}-\cancel{y'^2})}{1+y'^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \iff -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\cdot\left(\frac{y''}{1+y'^2} - \frac{y'}{x}\right) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} x \neq 0,\ 1+y'^2 \neq 0 \\ x y'' - (1+y'^2)\cdot y' = 0 \end{cases}$$ - ED neliniară. Probleme esențiale în a o rezolva.

k) $I[y(x)]=\int_0^2 \left(y'^4(x)+y'^3(x)\right)dx,\ y(0)=0,\ y(2)=4.$

I varianta de rezolvare:

$F=y'^4+y'^3$; $\frac{\partial F}{\partial y}=0$; $\frac{\partial F}{\partial y'}=4y'^3+3y'^2$; $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=12y'^2y''+6y'\cdot y''=6y'y''\cdot(2y'+1)$

Ec. E-L : $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=-6y'y''\cdot(2y'+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y'=0 \Rightarrow y(x)=C_1 \Rightarrow \text{nu satisface cond. pe frontieră} \\ y''=0 \Rightarrow y'=C_2 \Rightarrow y(x)=C_2x+C_3 \\ y'=-\frac{1}{2} \Rightarrow y(x)=-\frac{1}{2}x+C_4 \end{cases}$

$\Rightarrow$ sol. generală : $y(x)=C_2x+C_3$

$\begin{cases} y(0)=0 \\ y(2)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_3=0 \\ 2C_2+C_3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2=2 \\ C_3=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y^*(x)=2x \text{ - extremală}}$

II varianta de rezolvare : $F=y'^4+y'^3=F(y')$ nu depinde explicit de x și $y(x)$ $\Rightarrow$ cazul I $\Rightarrow$ a se vedea la curs (s-a rezolvat).

8) seminar l) $I[y(x)]=\int_1^3 \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx,\ y(1)=2,\ y(3)=0.$

seminar: problema distanței dintre două puncte în plan

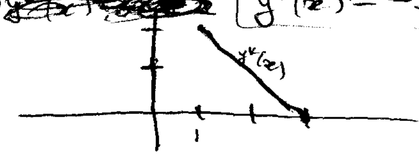
$F=\sqrt{1+y'^2}=F(y')$ nu depinde explicit de x și y $\Rightarrow$ cazul I $\Rightarrow$

integrala primă a ec. E-L.: $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot y''=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y''=0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{(1+y'^2)^{3/2}}=0 \Rightarrow \text{mulțimea vidă} \end{cases}$

$\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$; $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=\frac{\sqrt{1+y'^2}-\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2}=\frac{1}{(1+y'^2)^{3/2}}$

$\Rightarrow y''(x)=0 \Rightarrow y(x)=C_1x+C_2$

$\begin{cases} y(1)=2 \\ y(3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1+C_2=2 \\ 3C_1+C_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=-1 \\ C_2=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y^*(x)=-x+3}$ - extremala



$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{0-2} \Rightarrow y=-x+3$

m) s-a rezolvat la Curs $\Rightarrow$ Integrale prime ale ec. E-L., cazul 2.

n) cazul 3.

5) seminar o) $I[y(x)]=\int_0^2 \left(y^2(x)+xy'(x)\right)dx,\ y(0)=0,\ y(2)=1.$

$F=y^2+xy'$ - f-cție liniară în raport cu $y'(x)$.

$F=P(x,y)+Q(x,y)\cdot y'$

Ec. E-L în forma: $\frac{\partial P(x,y(x))}{\partial y}-\frac{\partial Q(x,y(x))}{\partial x}=0,$

unde $P(x,y(x))=y^2(x)$, $Q(x,y(x))=x$. $\Rightarrow 2y-1=0 \Rightarrow y(x)=\frac{1}{2}$.

Dar cum $y(x)=\frac{1}{2}$ nu satisface condițiile pe frontieră $y(0)=0$, $y(2)=1$ $\Rightarrow$ nu există extremale ale f-lei $I[y(x)]$.

6) seminar p) $I[y(x)]=\int_0^1 \left(2y^3(x)+3x^2\cdot y'(x)\right)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=y_1.$

$F=2y^3+3x^2y'$ - f-cție liniară în rap. cu y' ; $F=P(x,y)+Q(x,y)\cdot y'$

$P(x,y)=2y^3$; $Q(x,y)=3x^2$; ec. E-L. : $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6y^2-6x=0 \Leftrightarrow y^2(x)=x \Rightarrow y(x)=\pm\sqrt{x}$.

Cond. pe frontieră $y(0)=0$ are loc.

Cond. pe frontieră $y(1)=y_1$ are loc numai atunci când $y_1=1$ sau $y_1=-1$.

$\Rightarrow y^*(x)=\pm\sqrt{x}$ - extremale d.n.d. $y_1=\pm 1$.

7) seminar 9) $I[y(x)] = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(y^2(x)\cos x + 2y(x)y'(x)\sin x\right)dx$, $y(\pi/6) = 1$, $y(\pi/2) = 2$

$F = y^2\cos x + 2yy'\sin x$ - f-cție liniară în rap. cu y';

$\Rightarrow$ ec. E-L. $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$; $P = y^2\cos x$; $Q = 2y\sin x$;

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y\cos x$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y\cos x$;

ec. E-L: $2y\cos x - 2y\cos x \equiv 0$, $\forall\ (x, y(x))$

$\Rightarrow F = y^2\cos x + 2yy'\sin x$ este diferențiala totală a funcției $y^2(x)\sin x = G(x, y(x))$

$$I[y(x)] = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(y^2(x)\cos x + 2y(x)y'(x)\sin x\right)dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(y^2(x)\cos x\,dx + 2y(x)\sin x\,dy\right) =$$

$$= \int_{(\pi/6;1)}^{(\pi/2;2)} d\left(y^2(x)\sin x\right) = y^2(x)\sin x \Big|_{x=\pi/6}^{x=\pi/2} = y^2(\pi/2) - y^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{1}{2} = 4 - 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{2} = 3.5.$$

Întrucât p/u $\forall$ f-cție admisibilă valoarea integralei este constantă, f-la nu depinde de alegerea f-cției $y(x)$ și, prin urmare, problema variațională își pierde sensul.