Tema 5. **Generalizări ale problemei elementare de Calcul Variațional**

I. Funcționale ce depind de mai multe funcții necunoscute de o variabilă

Problema 5.1. Să se afle extremalele admisibile ale funcționalei:

$$I[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^{\pi/2} \left(y_1'^2(x) + y_2'^2(x) + 2y_1(x)y_2(x) \right) dx,$$

$$\bar{y} \in \mathcal{D} := \{ \bar{y} = (y_1, y_2) \in C^1([0;\pi/2]; \mathbb{R}^2) \mid y_1(0) = y_2(0) = 0,\ y_1(\pi/2) = 1,\ y_2(\pi/2) = -1 \}.$$

Soluție: Scriem sistemul de ecuații Euler-Lagrange (prescurtat SEEL): $F_{y_i} - \frac{d}{dx}(F_{y_i'}) = 0$, $i = \overline{1,2}$

Avem: $F = y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1 y_2$; $F_{y_1} = 2y_2$; $F_{y_2} = 2y_1$; $F_{y_1'} = 2y_1'$; $F_{y_2'} = 2y_2'$;

$\frac{d}{dx}(F_{y_1'}) = 2y_1''$; $\frac{d}{dx}(F_{y_2'}) = 2y_2''$; At. SEEL este:

$$\begin{cases} 2y_2 - 2y_1'' = 0 \\ 2y_1 - 2y_2'' = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1'' = y_2 \\ y_2'' = y_1 \end{cases}.$$

Pentru a rezolva SEEL obținut, reducem pe acesta la o singură ecuație diferențială în raport cu necunoscuta y_1. Obținem:

$y_1''' = y_2'$; $y_1^{(iv)} = y_2''$ $\Rightarrow$ a doua ecuație: $y_1^{(iv)} = y_1 \Leftrightarrow y_1^{(iv)} - y_1 = 0$ – EDLO;

Ec. caract.: $\lambda^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm 1 \\ \lambda_{3,4} = \pm i \end{cases}$,

$\Rightarrow$ SGEO: $y_1(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$.

Atunci $y_2(x) = y_1''(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x$.

Constantele c_j, $j = \overline{1,4}$, se vor determina din condițiile la extremități:

$$\begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \\ y_1(\pi/2) = 1 \\ y_2(\pi/2) = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 e^{\pi/2} + c_2 e^{-\pi/2} + c_4 = 1 \\ c_1 e^{\pi/2} + c_2 e^{-\pi/2} - c_4 = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ 2c_1 e^{\pi/2} + 2c_2 e^{-\pi/2} = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = +1 \end{cases},$$

Întrucât constantele c_j $(j = \overline{1,4})$ au fost determinate în mod unic, obținem o singură extremală admisibilă $\bar{y}^*(x) = (y_1^*(x); y_2^*(x))^T = (\sin x; -\sin x)^T\ (\in \mathcal{D})$. ■

Problema 5.2. Să se afle extremalele admisibile ale funcționalei:

$$I[\bar{y}(x)] = \int_0^{\pi/2} (y_1'(x) y_2'(x) - y_1(x) y_2(x)) dx,$$

$$\bar{y} \in \mathcal{D} := \{ \bar{y} = (y_1, y_2) \in C^1([0;\pi/2]; \mathbb{R}^2) \mid y_1(0) = y_2(0) = 0,\ y_1(\pi/2) = y_2(\pi/2) = 1 \}$$

Soluție: Scriem SEEL: $F_{y_i} - \frac{d}{dx}(F_{y_i'}) = 0$, $i = \overline{1,2}$.

Avem:

$F = y_1' y_2' - y_1 y_2$; $F_{y_1} = -y_2$; $F_{y_2} = -y_1$; $F_{y_1'} = y_2'$; $F_{y_2'} = y_1'$; $\frac{d}{dx}(F_{y_1'}) = y_2''$; $\frac{d}{dx}(F_{y_2'}) = y_1''$

At. SEEL este:

$$\begin{cases} -y_2 - y_2'' = 0 \\ -y_1 - y_1'' = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_2'' + y_2 = 0 \\ y_1'' + y_1 = 0 \end{cases}$$

I. $y_2'' + y_2 = 0$ – EDLO cu coef. constanți.

$\lambda_2^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \Rightarrow$ SFS: $\cos x$; $\sin x$ $\Rightarrow$ SGEO: $y_2(x) = c_3 \cos x + c_4 \sin x$ $(c_3, c_4 \in \mathbb{R})$

II. $y_1'' + y_1 = 0$; $\lambda_1^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1^{1,2} = \pm i \Rightarrow$ SGEO: $y_1(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

Constantele c_j $(j = \overline{1,4})$ se vor determina din condițiile la extremități:

$$\begin{cases} y_1(0)=0 \\ y_2(0)=0 \\ y_1(\pi/2)=1 \\ y_2(\pi/2)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=0 \\ c_3=0 \\ c_2=1 \\ c_4=1 \end{cases} \Rightarrow \bar{y}^*(x)=(y_1^*(x), y_2^*(x))^T=(\sin x, \sin x)^T$$ – unica extremală admis...

Problema 5.3. Să se afle extremalele admisibile ale funcționalei

$$I[\bar{y}(x)]=\int_1^2 \left(12x y_1(x)+y_1'^2(x)+y_2'^2(x)+2y_2(x)y_3'(x)+y_3'^2(x)+2y_3(x)y_2'(x)\right)dx$$

$$\bar{y}\in\mathcal{D}:=\{\bar{y}=(y_1,y_2,y_3)\in C^1([1;2];\mathbb{R}^3)\mid y_1(1)=0,\ y_2(1)=2,\ y_3(1)=0,\ y_1(2)=6,\ y_2(2)=3,\ y_3(2\ldots$$

Soluție: $F=12xy_1+y_1'^2+y_2'^2+2y_2y_3'+y_3'^2+2y_3y_2'$; $F_{y_1}=12x$; $F_{y_2}=2y_3'$; $F_{y_3}=2y_2'$;

$F_{y_1'}=2y_1'$; $F_{y_2'}=2y_2'+2y_3$; $F_{y_3'}=2y_2+2y_3'$;

At. SEEL este:

$$\begin{cases} F_{y_1}-\frac{d}{dx}(F_{y_1'})=0 \\ F_{y_2}-\frac{d}{dx}(F_{y_2'})=0 \\ F_{y_3}-\frac{d}{dx}(F_{y_3'})=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x-2y_1''=0 \\ 2y_3'-2y_2''-2y_3'=0 \\ 2y_2'-2y_2'-2y_3''=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1''=6x \\ y_2''=0 \\ y_3''=0 \end{cases}$$

$y_1''=6x \Rightarrow y_1'=3x^2+c_1 \Rightarrow y_1=x^3+c_1x+c_2$ $(c_1,c_2\in\mathbb{R})$;

$y_2''=0 \Rightarrow y_2'=c_3 \Rightarrow y_2=c_3x+c_4$ $(c_3,c_4\in\mathbb{R})$;

$y_3''=0 \Rightarrow y_3=c_5x+c_6$ $(c_5,c_6\in\mathbb{R})$;

Constantele c_j $(j=\overline{1,6})$ se vor determina din condițiile la extremități:

$$\begin{cases} y_1(1)=0 \\ y_2(1)=2 \\ y_3(1)=0 \\ y_1(2)=6 \\ y_2(2)=3 \\ y_3(2)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+c_1+c_2=0 \\ c_3+c_4=2 \\ c_5+c_6=0 \\ 8+2c_1+c_2=6 \\ 2c_3+c_4=3 \\ 2c_5+c_6=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=-1 \\ c_2=0 \\ c_3=1 \\ c_4=1 \\ c_5=2 \\ c_6=-2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \bar{y}^*(x)=(y_1^*(x), y_2^*(x), y_3^*(x))^T=(x^3-x,\ x+1,\ 2x-2)^T$ – unica extremală admisibilă a problemei variaționale date

II. Funcționale ce depind de derivate de ordin superior ale unei funcții necunoscute de o variabilă

Problema 5.4. Să se afle extremalele admisibile ale funcționalei

a) $I[y(x)]=\int_0^1 y''^2(x)dx$, $y\in\mathcal{D}:=\{y\in C^2[0;1] \mid y(0)=y'(0)=y'(1)=0,\ y(1)=1\}$;

b) $I[y(x)]=\int_0^1 (y''^2(x)-48y(x))dx$, $y\in\mathcal{D}:=\{y\in C^2[0;1] \mid y(0)=1,\ y'(0)=-4,\ y(1)=y'(1)=0\}$;

c) $I[y(x)]=\int_0^1 e^{-x}\cdot y''^2(x)dx$, $y\in\mathcal{D}:=\{y\in C^2[0;1] \mid y(0)=y'(0)=1,\ y(1)=y'(1)=e\}$.

d) $I[y(x)]=\int_0^{\pi/4}(y''^2(x)-16y^2(x)+xe^{-x})dx$, $y\in\mathcal{D}:=\{y\in C^2[0;\pi/4] \mid y(0)=1,\ y(\pi/4)=0,\ y'(0)=0,\ y'(\pi\ldots$

Soluție: b) $n=2$ (ordinul derivatei superioare). Scriem ecuația Euler–Poisson (prescurtat EEP):

$$F_y-\frac{d}{dx}(F_{y'})+\frac{d^2}{dx^2}(F_{y''})=0.$$

Avem: $F=y''^2-48y$; $F_y=-48$; $F_{y'}=0$; $F_{y''}=2y''$; $\frac{d^2}{dx^2}(F_{y''})=2y^{(IV)}$;

Atunci EEP este: $-48+2y^{(IV)}=0 \Leftrightarrow y^{(IV)}=24 \Rightarrow y^{(III)}=24x+c_1 \Rightarrow y''=12x^2+c_1x+c_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y'=4x^3+\frac{c_1}{2}x^2+c_2x+c_3 \Rightarrow y=x^4+\frac{c_1}{6}x^3+\frac{c_2}{2}x^2+c_3x+c_4$ – soluția generală a EEP

Constantele c_j $(j=\overline{1,4})$ se vor determina din condițiile la extremități:

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=-4 \\ y(1)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_4=1 \\ c_3=-4 \\ 1+\frac{c_1}{6}+\frac{c_2}{2}+c_3+c_4=0 \\ 4+\frac{c_1}{2}+c_2+c_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{c_1}{6}+\frac{c_2}{2}=2 \\ \frac{c_1}{2}+c_2=0 \\ c_3=-4 \\ c_4=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=-24 \\ c_2=-c_1/2 \\ c_3=-4 \\ c_4=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=-24 \\ c_2=12 \\ c_3=-4 \\ c_4=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow y^*(x)=x^4-4x^3+6x^2-4x+1$ – unica extremală admisibilă în problema variațională dată.

c) $m=2 \Rightarrow$ EEP: $F_y-\frac{d}{dx}(F_{y'})+\frac{d^2}{dx^2}(F_{y''})=0$

Avem: $F=e^{-x}\cdot y''^2$; $F_{y'}=0$; $F_y=0$; $F_{y''}=2e^{-x}\cdot y''$; $\frac{d}{dx}(F_{y''})=-2e^{-x}y''+2e^{-x}y'''$;

$\frac{d}{dx^2}(F_{y''})=2e^{-x}y''-4e^{-x}y'''+2e^{-x}y^{(IV)}$. At. EEP este:

$2e^{-x}y''-4e^{-x}\cdot y'''+2e^{-x}\cdot y^{(IV)}=0 \Leftrightarrow y^{(IV)}(x)-2y^{(III)}(x)+y''(x)=0$ – EDLO;

Să Rezolvăm EDLO. Ec. caract. este: $\lambda^4-2\lambda^3+\lambda^2=0 \Leftrightarrow \lambda^2\cdot(\lambda^2-2\lambda+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2}=0 \\ (\lambda-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2}=0 \\ \lambda_{3,4}=1 \end{cases} \Rightarrow \lambda=0$ și $\lambda=1$, ambele de multiplicitate 2 $\models$

$\models$ SFS al EDLO este: $e^{0\cdot x}, xe^{0\cdot x}, e^{1\cdot x}, x^1e^{1\cdot x}$, iar soluția generală a EDLO este:

$y(x)=c_1+c_2x+c_3e^x+c_4xe^x$, $\quad (y'(x)=c_2+c_3e^x+c_4e^x+c_4xe^x)$

constantele c_j $(j=\overline{1,4})$ se vor determina din condițiile la extremități:

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=1 \\ y(1)=e \\ y'(1)=e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1+c_3=1 \\ c_2+c_3+c_4=1 \\ c_1+c_2+c_3e+c_4e=e \\ c_2+c_3e+2c_4e=e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=1-c_3 \\ c_2=1-c_3-c_4 \\ 1-c_3+1-c_3-c_4+c_3e+c_4e=e \\ 1-c_3-c_4+c_3e+2c_4e=e \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1=1-c_3 \\ c_2=1-c_3-c_4 \\ (e-2)c_3+(e-1)c_4=e-2 \\ (e-1)c_3+(2e-1)c_4=e-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=1-c_3 \\ c_2=1-c_3-c_4 \\ c_3=1-\frac{e-1}{e-2}c_4 \\ \cancel{(e-1)}-\frac{(e-1)^2}{e-2}c_4+(2e-1)c_4=\cancel{e-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=1-c_3 \\ c_2=1-c_3-c_4 \\ c_3=1-\frac{e-1}{e-2}c_4 \\ c_4\underbrace{\left(2e-1-\frac{(e-1)^2}{e-2}\right)}_{\frac{e^2-3e+1}{e-2}\neq 0}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1=0 \\ c_2=0 \\ c_3=1 \\ c_4=0 \end{cases} \models y^*(x)=e^x$$ – unica extremală admisibilă în probl. de CV. $\boxtimes$

! a) și d) p/u acasă !

III. Funcționale ce depind de derivate de ordin superior ale mai multor funcții necunoscute de o singură variabilă.

Problema 5.5. Să se afle extremalele admisibile ale funcționalei

$$I[\bar{y}(x)]=\int_0^1\left((x+1)^3\cdot y_1''^2(x)+y_2'''^2(x)\right)dx,$$

$\bar{y}\in\mathcal{D}:=\{\bar{y}=(y_1,y_2)\in C^3([0;1];\mathbb{R}^2) \mid y_1(0)=1, y_2(0)=0, y_1(1)=1/2, y_2(1)=1, y_1'(0)=-1, y_2'(0)=0, y_1'(1)=-1/4,$

$y_2'(1)=3,\ y_2''(0)=0,\ y_2''(1)=6 \}$.

Soluție: Ordinul derivatei superioare a f-cției $y_1(x)$ este egal cu 2, iar al funcției $y_2(x)$ – cu
At. scriem sistemul de ecuații Euler–Poisson (prescurtat SEEP):

$$\begin{cases} F_{y_1}-\dfrac{d}{dx}(F_{y_1'})+\dfrac{d^2}{dx^2}(F_{y_1''})=0, \\ F_{y_2}-\dfrac{d}{dx}(F_{y_2'})+\dfrac{d^2}{dx^2}(F_{y_2''})-\dfrac{d^3}{dx^3}(F_{y_2'''})=0. \end{cases}$$

Avem: $F=(x+1)^3\cdot y_1''^2+y_2'''^2$; $F_{y_1}=0$; $F_{y_1'}=0$; $F_{y_1''}=2(x+1)^3\cdot y_1''$; $\dfrac{d}{dx}(F_{y_1''})=6(x+1)^2y_1''+2(x+1)^3y$

$\dfrac{d^2}{dx^2}(F_{y_1''})=12(x+1)y_1''+6(x+1)^2y_1'''+6(x+1)^2\cdot y_1'''+2(x+1)^3\cdot y_1^{(IV)}$;

$F_{y_2}=0$; $F_{y_2'}=0$; $F_{y_2''}=0$; $F_{y_2'''}=2y_2'''$; $\dfrac{d^3}{dx^3}(F_{y_2'''})=2y_2^{(VI)}$;

At. SEEP este: $\begin{cases} 12(x+1)y_1''+12(x+1)^2y_1'''+2(x+1)^3\cdot y_1^{(IV)}=0, \\ -2y_2^{(VI)}=0. \end{cases}$

Să rezolvăm ecuația $-2y_2^{(VI)}=0 \Rightarrow y_2^{(VI)}=0 \Rightarrow y_2^{(V)}=c_1 \Rightarrow y_2^{(IV)}=c_1x+c_2 \Rightarrow y_2'''=c_1\frac{x^2}{2}+c_2x+c_3$

$\Rightarrow y_2''=\frac{c_1}{6}x^3+\frac{c_2}{2}x^2+c_3x+c_4 \Rightarrow y'=\frac{c_1}{24}x^4+\frac{c_2}{6}x^3+\frac{c_3}{2}x^2+c_4x+c_5 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_2(x)=\frac{c_1}{120}\cdot x^5+\frac{c_2}{24}x^4+\frac{c_3}{6}x^3+\frac{c_4}{2}x^2+c_5x+c_6$.

Să rezolvăm ecuația: $(x+1)^3\cdot y_1^{(IV)}(x)+6(x+1)^2\cdot y_1^{(III)}(x)+6(x+1)y_1''(x)=0$.
Din cele menționate mai sus, se observă că această ecuație se poate scrie sub forma:

$\dfrac{d^2}{dx^2}(F_{y_1''})=0 \Leftrightarrow \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{dx}(F_{y_1''})\right)=0 \Leftrightarrow \dfrac{d}{dx}\left(6(x+1)^2y_1''+2(x+1)^3y_1'''\right)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6(x+1)^2y_1''+2(x+1)^3y_1'''=c_7$; Facem substituția $z=y_1''$. Atunci avem:

$6(x+1)^2z+2(x+1)^3z'=c_7 \Rightarrow (x+1)^3z'+3(x+1)^2z=c_7/2$ – EDL Neomogenă.
Să rezolvăm mai întâi EDLO: $(x+1)^3z'+3(x+1)^2z=0$ – ED cu variabile separabile
D/ce $x+1\neq0,\ \forall x\in[0;1] \Rightarrow (x+1)^3\dfrac{dz}{dx}=-3(x+1)^2z \Rightarrow \dfrac{dz}{z}=-\dfrac{3}{x+1}dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|z|=-3\ln|x+1|+\ln c \Rightarrow z(x)=c(x+1)^{-3}$.

Soluția generală a EDLN se va căuta prin metoda variației constantei:

$z(x)=\dfrac{c(x)}{(x+1)^3}$; $z'(x)=\dfrac{c'(x)(x+1)^3-3c(x)(x+1)^2}{(x+1)^6}$. Substituim $z(x)$ și $z'(x)$ în ec. neomogenă:

$(x+1)^3\cdot\left(\dfrac{c'(x)}{(x+1)^3}-\dfrac{3c(x)\cdot(x+1)^2}{(x+1)^6}\right)+3(x+1)^2\cdot\dfrac{c(x)}{(x+1)^3}=\dfrac{c_7}{2} \Rightarrow c'(x)-\cancel{\dfrac{3c(x)}{x+1}}+\cancel{\dfrac{3c(x)}{x+1}}=\dfrac{c_7}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow c'(x)=c_7/2 \Rightarrow c(x)=\frac{c_7}{2}x+c_8 \Rightarrow z(x)=\left(\frac{c_7}{2}x+c_8\right)\cdot\dfrac{1}{(x+1)^3}$;

Pentru a trece în variabila y_1 efectuăm transformările următoare:
$y_1''(x)=z(x)=\left(\frac{c_7}{2}x+c_8\right)\cdot\dfrac{1}{(x+1)^3}=\dfrac{c_7x+2c_8}{2(x+1)^3}$; $\Rightarrow y_1'(x)=\int\dfrac{c_7x+2c_8}{2(x+1)^3}dx=-\dfrac{c_7}{4}\cdot\dfrac{2x+1}{(x+1)^2}+c_8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{(x+1)^2}$
$+c_9$, $\left\{\int\dfrac{x\,dx}{(x+1)^3}=\int\dfrac{dx}{(x+1)^2}-\int\dfrac{dx}{(x+1)^3}=-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2(x+1)^2}=\dfrac{1-2(x+1)}{2(x+1)^2}=\dfrac{-(2x+1)}{2(x+1)^2}\right\}$

$\Rightarrow y_1(x)=-\dfrac{c_7}{4}\cdot\int\dfrac{2x+1}{(x+1)^2}dx-\dfrac{c_8}{2}\cdot\int\dfrac{dx}{(x+1)^2}+c_9x+c_{10}$;

$\int\dfrac{2x+1}{(x+1)^2}dx=\int\dfrac{x\,dx}{(x+1)^2}+\int\dfrac{dx}{x+1}=2\int\dfrac{dx}{x+1}-\int\dfrac{dx}{(x+1)^2}=2\ln|x+1|+\dfrac{1}{x+1}$;

$\Rightarrow y_1(x)=-\dfrac{c_7}{4}\left(\dfrac{1}{x+1}+2\ln|x+1|\right)+\dfrac{c_8}{2}\cdot\dfrac{1}{x+1}+c_9x+c_{10}$;

Constantele c_j $(j=\overline{1,10})$ se determină din cond. la extremități:
După rezolvarea sistem. de ec. alg. coresp. se obține: $c_1=c_2=c_4=c_5=c_6=0$, $c_3=6$, $c_7=0$, $c_8=2$, $c_9=0$, $c_{10}=0$

Astfel $\bar{y}^*(x)=(y_1^*(x);y_2^*(x))^T=\left(\dfrac{1}{x+1};x^3\right)^T$ este unica extremală admisibilă în problema de CV dată ■

Tema 6: Probleme variaționale de extrem condiționat

I. Probleme de extrem condiționat cu legături olonome (restricții de tip algebric)

Problema 6.1. Să se afle extremalele admisibile ale funcționalei:

a) $I[\bar{y}(x)]=\int_0^{\pi/2}\left(y_1^2(x)+y_2^2(x)-y_1'^2(x)-y_2'^2(x)\right)dx$, $\bar{y}\in\mathcal{D}:=\{\bar{y}=(y_1,y_2)\in C^1([0;\pi/2];\mathbb{R}^2)\,|\,y_1(0)=1,$

$y_2(0)=-1,\ y_1(\pi/2)=1,\ y_2(\pi/2)=1\}$,

d/ă $\bar{y}\in\mathcal{D}$ satisface legătura olonomă $y_1(x)-y_2(x)-2\cos x=0$.

b) $I[\bar{y}(x)]=\int_0^1\left(y_1'^2(x)+2y_1(x)y_2(x)+y_2'^2(x)\right)dx$, $\bar{y}\in\mathcal{D}:=\{\bar{y}=(y_1,y_2)\in C^1([0;1];\mathbb{R}^2)\,|\,y_1(0)=1,\ y_2(0)=1,$

$y_1(1)=e,\ y_2(1)=e^{-1}\}$,

d/ă $\bar{y}\in\mathcal{D}$ satisface legătura olonomă $y_1(x)-y_2(x)-e^x+e^{-x}=0$.

Soluție: a) Întrucât avem $y_1(0)-y_2(0)-2\cos 0=0$, $y_1(\pi/2)-y_2(\pi/2)-2\cos\frac{\pi}{2}=0$, rezultă că condițiile la extremități și legătura olonomă sunt compatibile.

Avem:
$$F=y_1^2+y_2^2-y_1'^2-y_2'^2\ ;\quad \varphi_1(x,\bar{y})=y_1-y_2-2\cos x\ ;\quad m=1$$

Scriem funcția Lagrange:
$$F^*(x,\bar{y},\bar{y}')=F(x,\bar{y},\bar{y}')+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(x)\cdot\varphi_j(x,\bar{y})=F(x,\bar{y},\bar{y}')+\lambda_1(x)\cdot\varphi_1(x,\bar{y})=$$
$$=y_1^2+y_2^2-y_1'^2-y_2'^2+\lambda_1\cdot(y_1-y_2-2\cos x)\ ;$$

Avem:
$$F^*_{y_1}=2y_1+\lambda_1\ ;\quad F^*_{y_1'}=-2y_1'\ ;\quad \frac{d}{dx}\left(F^*_{y_1'}\right)=-2y_1''\ ;$$
$$F^*_{y_2}=2y_2-\lambda_1\ ;\quad F^*_{y_2'}=-2y_2'\ ;\quad \frac{d}{dx}\left(F^*_{y_2'}\right)=-2y_2''\ ;$$

Scriem sistemul de ecuații Euler-Lagrange (SEEL):
$$\begin{cases}F^*_{y_1}-\dfrac{d}{dx}\left(F^*_{y_1'}\right)=0\\ F^*_{y_2}-\dfrac{d}{dx}\left(F^*_{y_2'}\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2y_1+\lambda_1+2y_1''=0\\ 2y_2-\lambda_1+2y_2''=0\end{cases}\xRightarrow[\text{ecuațiile}]{\text{adunăm}}2(y_1+y_2)+2(y_1''+y_2'')=0\ (*)$$

Efectuăm substituția: $y_1+y_2=z\ \overset{(*)}{\Rightarrow}\ z''+z=0$ – EDLO

Ec. caract.: $\lambda^2+1=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=\pm i\Rightarrow$ SFS: $\cos x,\sin x$.

Soluția generală a EDLO: $z(x)=c_1\cos x+c_2\sin x=y_1(x)+y_2(x)$

Scriem relația p/u legătura olonomă: $y_1(x)-y_2(x)=2\cos x$ $\Big]\Rightarrow$ adunăm aceste ecuații $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 2y_1(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+2\cos x\Rightarrow y_1(x)=\frac{c_1}{2}\cos x+\frac{c_2}{2}\sin x+\cos x$$

În baza condițiilor la extremități avem:
$$\begin{cases}y_1(0)=1\\ y_1(\pi/2)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{c_1}{2}+1=1\\ \dfrac{c_2}{2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c_1=0\\ c_2=2\end{cases}\Rightarrow y_1^*(x)=\sin x+\cos x\ ;$$

Relația p/u legătura olonomă ne dă: $y_2^*(x)=y_1^*(x)-2\cos x=\sin x-\cos x$;

Astfel vector-funcția $\bar{y}^*(x)=(y_1^*(x),y_2^*(x))^T=(\sin x+\cos x,\ \sin x-\cos x)^T$ este unica extremală admisibilă în problema variațională dată. $\boxtimes$

! b) p/u acasă !

Problema 6.2. Să se afle drumul de lungime minimă dintre punctele $A(0,-1,1)$ și $B(1,0,-1)$ ce aparțin planului de ecuație $x+y_1(x)+y_2(x)=0$.

Soluție: Modelul matematic al problemei date este următorul:

$$\begin{cases} I[y_1(x),y_2(x)]=\int_0^1\sqrt{1+y_1'^2(x)+y_2'^2(x)}\,dx \longrightarrow \min, \\ \bar y\in D:=\{\bar y=(y_1,y_2)\in C^1([0;1];\mathbb{R}^2) \mid y_1(0)=-1,\, y_2(0)=1,\, y_1(1)=0,\, y_2(1)=-1\} \\ x+y_1(x)+y_2(x)=0 \end{cases}$$

Deoarece $0+y_1(0)+y_2(0)=0+(-1)+1=0$, $1+y_1(1)+y_2(1)=1+0+(-1)=0$, rezultă că condițiile la extremități și legătura olonomă sunt compatibile.

Avem: $F=\sqrt{1+y_1'^2+y_2'^2}$; $n=2$; $\varphi_1(x,y_1,y_2)=x+y_1+y_2$; $m=1$ $(m<n)$

Scriem funcția lui Lagrange:

$$F^*(x,\bar y,\bar y')=F(x,\bar y,\bar y')+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(x)\cdot\varphi_j(x,\bar y)=\sqrt{1+y_1'^2+y_2'^2}+\lambda_1(x)\cdot(x+y_1+y_2)$$

Sistemul de ecuații Euler-Lagrange:

$$\begin{cases} F^*_{y_1}-\frac{d}{dx}(F^*_{y_1'})=0 \\ F^*_{y_2}-\frac{d}{dx}(F^*_{y_2'})=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1(x)-\frac{d}{dx}\left(\frac{y_1'}{\sqrt{1+y_1'^2+y_2'^2}}\right)=0 \\ \lambda_1(x)-\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2'}{\sqrt{1+y_1'^2+y_2'^2}}\right)=0 \end{cases}$$

Scădem din a doua ecuație pe prima:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_1'-y_2'}{\sqrt{1+y_1'^2+y_2'^2}}\right)=0 \implies \frac{y_1'-y_2'}{\sqrt{1+y_1'^2+y_2'^2}}=c \quad (*);$$

Restricția p/u legătura olonomă ne dă: $x+y_1+y_2=0 \Rightarrow y_1=-x-y_2 \Rightarrow y_1'=-1-y_2'$.

Substituim expresia obținută p/u y_1' în ec. (*). Obținem:

$$\frac{y_1'-y_2'}{\sqrt{1+y_1'^2+y_2'^2}}=c \implies \frac{-2y_2'-1}{\sqrt{1+y_1'^2+y_2'^2}}=c \implies -2y_2'-1=c\cdot\sqrt{1+y_1'^2+y_2'^2},$$

Ridicăm ambii membri la pătrat: $(-2y_2'-1)^2=c^2\cdot(1+y_1'^2+y_2'^2)=c^2(1+(-1-y_2')^2+y_2'^2) \implies$

$$\implies 4y_2'^2+4y_2'+1=c^2\cdot(2+2y_2'+2y_2'^2) \implies (4-2c^2)y_2'^2+(4-2c^2)y_2'+1-2c^2=0;$$

$$y_2'=\frac{(c^2-2)\pm\sqrt{(c^2-2)^2-(4-2c^2)(1-2c^2)}}{4-2c^2}=C_1^{\pm} \implies y_2(x)=C_1^{\pm}x+C_2.$$

$$y_1(x)=-x-y_2(x)=-x-C_1^{\pm}x-C_2$$

Constantele $C_1^{\pm}$ și C_2 se determină din condițiile la extremități:

$$\begin{cases} y_2(0)=1 \\ y_2(1)=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_2=1 \\ C_1^{\pm}=-2 \end{cases} \implies y_2^*(x)=-2x+1 \implies y_1^*(x)=-x-y_2^*(x)=-x+2x-1=x-1$$

Astfel $\bar y^*(x)=(y_1^*(x),y_2^*(x))^T=(x-1,-2x+1)^T$ este unica extremală admisibilă în problema de CV. Valoarea funcționalei în $\bar y^*(x)$ este: $I[\bar y^*(x)]=\sqrt6\cdot\int_0^1 dx=\sqrt6$.

Din formularea problemei rezultă că aceasta are soluție unică $\implies$ extremala $\bar y^*(x)$ realizează un extrem (un minim). Astfel drumul de lungime minimă dintre punctele A și B are valoarea $\sqrt6$.

II. Probleme de extrem condiționat cu legături neolonome (restricții de tip diferențial)

Problema 6.3. Să se afle extremalele admisibile ale funcționalei:

a) $$I[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^1 (y_1'^2(x) + y_2'^2(x))dx, \quad \bar{y} \in \mathcal{D} := \{\bar{y} = (y_1, y_2) \in C^1([0;1];\mathbb{R}^2) \mid$$
$$y_1(0) = 2, y_2(0) = 0, y_1(1) = 2\operatorname{ch}1, y_2(1) = 2\operatorname{sh}1\},$$
d/ă $\bar{y} \in \mathcal{D}$ satisface legătura neolonomă $y_1'(x) - y_2(x) = 0$.

b) $$I[\bar{y}(x)] = \int_0^1 (y_1^2(x) + 2y_1'^2(x) + y_2'^2(x))dx, \quad \bar{y} \in \mathcal{D} := \{\bar{y} = (y_1, y_2) \in C^1([0;1];\mathbb{R}^2) \mid y_1(0) = 1,$$
$$y_2(0) = 0, y_1(1) = e + e^{-1}, y_2(1) = 2e - e^{-1}\},$$
d/ă $\bar{y} \in \mathcal{D}$ satisface legătura neolonomă $y_1'(x) - y_2(x) = 0$.

c) $$I[\bar{y}(x)] = \int_0^{\pi/2} (y_1'^2(x) + y_2'^2(x) + 2y_1(x)y_2(x))dx, \quad \bar{y} \in \mathcal{D} := \{\bar{y} = (y_1, y_2) \in C^1([0;\pi/2];\mathbb{R}^2) \mid y_1(0) = 1,$$
$$y_2(0) = -1, y_1(\pi/2) = \frac{\pi^2}{4} + 1, y_2(\pi/2) = \frac{\pi^2}{4} - 1\},$$
d/ă $\bar{y} \in \mathcal{D}$ satisface legătura neolonomă $y_1'(x) + y_2'(x) - 4x = 0$.

Soluție: a) Avem: $F = y_1'^2 + y_2'^2 = F(x, \bar{y}, \bar{y}')$; $\varphi(x, \bar{y}, \bar{y}') = y_1' - y_2$; $\Rightarrow m = 1$;

Scriem funcția Lagrange:
$$F^*(x, \bar{y}, \bar{y}') = F(x, \bar{y}, \bar{y}') + \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) \cdot \varphi_j(x, \bar{y}, \bar{y}') =$$
$$= y_1'^2 + y_2'^2 + \lambda_1(y_1' - y_2), \quad \lambda_1 = \lambda_1(x);$$

Avem: $F^*_{y_1} = 0$; $F^*_{y_1'} = 2y_1' + \lambda_1$; $\frac{d}{dx}(F^*_{y_1'}) = 2y_1'' + \lambda_1'$; $F^*_{y_2} = -\lambda_1$; $F^*_{y_2'} = 2y_2'$; $\frac{d}{dx}(F^*_{y_2'}) = 2y_2''$;

Scriem sistemul de ecuații Euler-Lagrange (SEEL):
$$\begin{cases} F^*_{y_1} - \frac{d}{dx}(F^*_{y_1'}) = 0 \\ F^*_{y_2} - \frac{d}{dx}(F^*_{y_2'}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1' + 2y_1'' = 0 \\ -\lambda_1 - 2y_2'' = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2y_2'' \Rightarrow \lambda_1' = -2y_2''' \end{cases} \Rightarrow -2y_2''' + 2y_1'' = 0 \; (*)$$

Folosim relația ce definește legătura olonomă: $y_1' - y_2 = 0 \Rightarrow y_1' = y_2 \Rightarrow y_1'' = y_2' \overset{(*)}{\Rightarrow} -2y_2''' + 2y_2' = 0$

$\Rightarrow y_2''' - y_2' = 0$ - EDLO; Ec. caract.: $\lambda^3 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_{2,3} = \pm 1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ sol. generală a EDLO: $y_2(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3$;

legătura olonomă ne dă: $y_1' = y_2 \Rightarrow y_1(x) = \int y_2(x)dx = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + c_3 x + c_4$

Coeficienții c_j ($j = \overline{1,4}$) se determină din condițiile la extremități:

$$\begin{cases} y_1(0) = c_1 - c_2 + c_4 = 2 \\ y_2(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ y_1(1) = c_1 e - c_2 e^{-1} + c_3 + c_4 = 2\operatorname{ch}1 = e + e^{-1} \\ y_2(1) = c_1 e + c_2 e^{-1} + c_3 = 2\operatorname{sh}1 = e - e^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_4 = 2 + c_2 - c_1 \\ c_3 = -c_2 - c_1 \\ c_1 e - c_2 e^{-1} - c_2 - c_1 + 2 + c_2 - c_1 = e + e^{-1} \\ c_1 e + c_2 e^{-1} - c_2 - c_1 = e - e^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_4 = 2 + c_2 - c_1 \\ c_3 = -c_2 - c_1 \\ (e-2)c_1 - e^{-1}c_2 = -2 + e + e^{-1} \\ (e-1)c_1 + (e^{-1} - 1)c_2 = e - e^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = c_4 = 0 \end{cases}$$

Astfel $\bar{y}^*(x) = (y_1^*(x), y_2^*(x))^T = (e^x + e^{-x}, e^x - e^{-x})^T$ este unica extremală admisibilă în probl. variațională dată ☒