1.3. Problema elementară de calcul variaţional (CV). Teorema lui Euler. Integrale prime ale ecuaţiei Euler-Lagrange

În continuare se va aborda problema determinării punctelor staționare pentru funcționale concrete. Condițiile necesare de extrem local slab, stabilite mai sus în secțiunea 1.2.5, conțin în enunțul lor funcțiile arbitrare $\delta y(x)$. Pentru a stabili condiții necesare de extrem local slab care să conțină numai funcțiile care realizează extremul se utilizează lemele fundamentale ale CV (a se vedea secțiunea 1.2.3).

1.3.1. Problema elementară de CV. Teorema lui Euler

Fie $\Omega := [a;b]\times\Delta_2$ $(\Delta_2 \subset \mathbb{R}^2)$ o mulțime deschisă, iar $F:\Omega\to\mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1. Să considerăm mulțimea

$$\mathcal{A} := \left\{ y \in C^1[a;b] \,|\, \left(x, y(x), y'(x)\right) \in \Omega, \forall x \in [a;b] \right\}.$$

Lema 1.3.1. *Mulțimea $\mathcal{A}$ este deschisă în spațiul $C^1[a;b]$.*

Demonstrație. Să considerăm un element arbitrar $y_0 \in \mathcal{A}$. Deoarece funcția vectorială $\gamma:[a;b]\to\Omega$, care asociază elementului $x\in[a;b]$ tripletul $(x, y_0(x), y_0'(x)) \in \Omega$, este continuă, rezultă că mulțimea

$$\mathcal{K} := \left\{ (x, y_0(x), y_0'(x)) \,|\, x \in [a;b] \right\} \subset \Omega$$

este compactă [1, p.54] şi, prin urmare, mărginită şi închisă. Evident că complementul $\bar{\Omega} := \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ al mulțimii Ω față de spațiul topologic $\mathbb{R}^3$ este o mulțime închisă şi $\mathcal{K}\cap\bar{\Omega} = \varnothing$.

Fie $d(\mathcal{K},\bar{\Omega}) := r = \inf\left\{ d(M,N) \,|\, M\in\mathcal{K},\, N\in\bar{\Omega} \right\}$ distanța dintre mulțimile $\mathcal{K}$ şi $\bar{\Omega}$. Vom arăta că $r > 0$.

Presupunem prin absurd că $r = d(\mathcal{K},\bar{\Omega}) = 0$. Atunci, pentru $\varepsilon = 1/n$, există $P_n \in \mathcal{K}$ şi $Q_n \in \bar{\Omega}$ astfel încât

$$d(P_n, Q_n) < 1/n. \tag{1.3.1}$$

Deoarece mulțimea $\mathcal{K}$ este mărginită, rezultă că şi şirul $\{P_n\}$ este mărginit. Din lema lui Cesàro [19, p.244] deducem că există un subşir $\{P_{n_k}\}$ convergent. Fie $P = \lim\limits_{k\to\infty} P_{n_k}$. Întrucât mulțimea $\mathcal{K}$ este închisă rezultă că $P\in\mathcal{K}$ [1, p.18].

Pe de altă parte, din relația (1.3.1) rezultă că subşirul $\{Q_{n_k}\}$ este de asemenea convergent şi limita sa este tot P. Evident $P\in\bar{\Omega}$ pentru că $\bar{\Omega}$ este închisă. Am ajuns astfel la o contradicție şi anume $P \in \mathcal{K} \cap \bar{\Omega}$, adică $\mathcal{K}$ şi $\bar{\Omega}$ nu sunt disjuncte. Deci $r > 0$.

Vom arăta acum că $V(y_0; r/2) \subset \mathcal{A}$ ceea ce va însemna că mulțimea $\mathcal{A}$ este deschisă. Fie $y \in V(y_0; r/2)$. Atunci $\|y - y_0\|_{C^1[a;b]} = \max_{x\in[a;b]} |y(x) - y_0(x)| + \max_{x\in[a;b]} |y'(x) - y_0'(x)| \le r/2$. În particular avem

$$|y(x) - y_0(x)| + |y'(x) - y_0'(x)| \le r/2, \ \forall x \in [a;b].$$

Fixăm un element arbitrar $x \in [a;b]$. Considerăm punctele $M(x, y_0(x), y_0'(x)) \in \mathcal{K}$ şi $T(x, y(x), y'(x))$. Avem

$$d(M,T) = \sqrt{(y(x) - y_0(x))^2 + (y'(x) - y_0'(x))^2} \le |y(x) - y_0(x)| + |y'(x) - y_0'(x)| \le r/2.$$

Deoarece $d(T,\mathcal{K}) \le d(T,M)$, rezultă că $d(T,\mathcal{K}) \le r/2$. Din această ultimă inegalitate deducem că $T \in \Omega$, pentru că, în caz contrar, dacă $T \in \bar{\Omega}$ atunci $d(T,\mathcal{K}) \ge d(\bar{\Omega},\mathcal{K}) = r$, ceea ce este absurd. Astfel a fost stabilit că dacă $y \in V(y_0; r/2)$, atunci $(x, y(x), y'(x)) \in \Omega, \ \forall x \in [a;b]$, deci $y \in \mathcal{A}$. ■

Să considerăm funcționala $I : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, definită în modul următor:

$$I[y(x)] := \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx. \tag{1.3.2}$$

Ne punem problema determinării funcțiilor din $\mathcal{A}$ care realizează un extrem al funcționalei (1.3.2) pe această mulțime. Conform teoremei 1.2.4, dacă $y^*(x) \in \mathcal{A}$ realizează un extrem al funcționalei (1.3.2) pe mulțimea $\mathcal{A}$ şi $I[y(x)]$ admite variația întâi în $y^*(x)$ pe orice direcție $\delta y(x) \in C^1[a;b]$, atunci

$$\delta I[y^*(x); \delta y(x)] = 0, \ \forall \delta y(x) \in C^1[a;b].$$

În practică se pune problema determinării punctelor de extrem al funcționalei (1.3.2) în submulțimea funcțiilor din $\mathcal{A}$ cu valori fixe la extremități. În acest caz, fie $y_a, y_b \in \mathbb{R}$ numere date şi

$$D := \{ y(x) \in \mathcal{A} \mid y(a) = y_a, y(b) = y_b \} \tag{1.3.3}$$

MFA în problema de extrem $\underset{y(x)\in D}{extr}\, I[y(x)]$. Vom stabili o condiție necesară de extrem local pentru funcțiile $y(x) \in D$.

Teorema 1.3.1. *(Euler) Fie* $\Omega = [a;b] \times \Delta_2$ $([a;b] \subset \mathbb{R}, \Delta_2 \subset \mathbb{R}^2)$ *o mulțime deschisă,* $F(x, y(x), y'(x)) \in C^1(\Omega)$ *şi* D *- mulțimea definită prin relația (1.3.3). Dacă funcția* $y^*(x) \in D$ *realizează un extrem local slab al funcționalei (1.3.2) pe MFA* D*, atunci* $y^*(x)$ *este soluție a ecuației diferențiale*

$$F_y\Big(x, y(x), y'(x)\Big) - \frac{d}{dx}\Big(F_{y'}\Big(x, y(x), y'(x)\Big)\Big) = 0. \tag{1.3.4}$$

Demonstrație. Fie funcția admisibilă $y^*(x) \in D$ realizează un minim relativ slab al funcționalei (1.3.2) pe MFA D. Atunci $\exists \varepsilon > 0$ astfel încât $I[y(x)] \geq I[y^*(x)]$, $\forall y(x) \in D \cap V_1(y^*(x);\varepsilon)$, unde $V_1(y^*(x);\varepsilon)$ este o ε-vecinătate de ordinul întâi a funcției $y^*(x)$. Funcția

$$y(x) := y^*(x) + \alpha \delta y(x) \ \ (\alpha \in \mathbb{R},\, \delta y(x) \in C^1[a;b] \text{ fixă}) \qquad (1.3.5)$$

va aparține mulțimii D dacă şi numai dacă $\delta y(x) \in H_1$ (a se vedea relația (1.2.2)), iar pentru valori suficient de mici în modul ale parametrului α (mai exact, pentru $|\alpha| \leq \varepsilon / \|\delta y\|_{C^1[a;b]}$) va aparține şi ε-vecinătății $V_1(y^*(x),\varepsilon)$. Astfel funcția admisibilă $y(x)$ de forma (1.3.5) satisface inegalitatea

$$I[y(x)] \geq I[y^*(x)]. \qquad (1.3.6)$$

Să considerăm funcția $\varphi : J := \left[-\varepsilon / \|\delta y(x)\|_{C^1[a;b]} ; \varepsilon / \|\delta y(x)\|_{C^1[a;b]}\right] \to \mathbb{R}$ definită prin relația

$$\varphi(\alpha) := I[y(x,\alpha)] = \int_a^b F\left(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)(x)\right) dx,$$

unde $y(x,\alpha)$ este de forma (1.3.5). Întrucât integrandul $F \in C^1(\Omega)$ funcția $\varphi(\alpha)$ este derivabilă. În virtutea inegalității (1.3.6) avem $\varphi(\alpha) \geq \varphi(0), \forall \alpha \in J$, ceea ce înseamnă că punctul $\alpha = 0$ realizează un minim al funcției $\varphi(\alpha)$. Atunci, conform teoremei lui Fermat pentru funcții de o variabilă, în $\alpha = 0$ avem

$$\varphi'(0) = 0. \qquad (1.3.7)$$

Ținând cont de relația (1.2.15), condiția (1.3.7) poate fi scrisă astfel:

$$\delta I\left[y^*(x);\delta y(x)\right] = \varphi'(0) = \int_a^b \left\{ F_y\left(x, y^*(x), {y^*}'(x)\right)\delta y(x) + F_{y'}\left(x, y^*(x), {y^*}'(x)\right)\delta y'(x) \right\} dx = 0, \qquad (1.3.8)$$

unde funcția $y = y^*(x)$ realizează un extrem relativ slab al funcționalei (1.3.2).

Conform ipotezei teoremei avem $F_y\left(x, y^*(x), {y^*}'(x)\right) \in C[a;b],\, F_{y'}\left(x, y^*(x), {y^*}'(x)\right) \in C[a;b]$. Atunci, ținând cont că egalitatea (1.3.8) are loc pentru orice $\delta y(x) \in C^1[a;b]$ supusă condițiilor $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$, conform lemei 1.2.4 deducem că există $\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\left(x, y^*(x), {y^*}'(x)\right)\right) \in C[a;b]$ şi are loc relația $\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\left(x, y^*(x), {y^*}'(x)\right)\right) = F_y\left(x, y^*(x), {y^*}'(x)\right)$, de unde rezultă relația (1.3.4).

Cazul în care $y^*(x)$ realizează un maxim local slab al funcționalei $I[y(x)]$ se analizează în mod analog. ■

Remarca 1.3.1. Relația (1.3.4) este numită ecuația Euler-Lagrange corespunzătoare funcționalei (1.3.2). Dacă $F \in C^2(\Omega)$, atunci în toate punctele în care $F_{y'y'}\left(x, y^*(x), {y^*}'(x)\right) \neq 0$ funcția extremală $y^*(x) \in D$ are derivată de ordinul doi şi verifică

EEL, scrisă sub forma unei ecuații diferențiale ordinare de ordinul doi în raport cu y:

$$F_{y'y'}y'' + F_{yy'}y' + F_{xy'} - F_y = 0, \quad (1.3.9)$$

unde $F_{y'y'} = \partial^2 F\left(x, y^*(x), y^{*\prime}(x)\right)/\partial y'^2$, $F_{yy'} = \partial^2 F\left(x, y^*(x), y^{*\prime}(x)\right)/\partial y \partial y'$, $F_{xy'} = \partial^2 F\left(x, y^*(x), y^{*\prime}(x)\right)/\partial x \partial y'$.

Remarca 1.3.2. Ecuația Euler-Lagrange reprezintă o condiție necesară (funcția care realizează extremul trebuie căutată printre soluțiile EEL), dar nu şi suficientă pentru ca funcția $y^*(x)$ să realizeze un extrem al funcționalei (1.3.2). Astfel soluția ecuației (1.3.4) ar putea şi să nu fie punct de extrem.

Definiția 1.3.1. Orice curbă integrală (soluție) a ecuației Euler-Lagrange (1.3.4) se numeşte extremală (punct staționar) a funcționalei (1.3.2).

Exemplul 1.3.1. *Să se afle extremalele admisibile ale funcționalei*

$$I[y(x)] = \int_0^1 \left(y^2(x) + y'^2(x) + 2y(x)e^x\right)dx, \ y(x) \in D := \left\{y(x) \in C^1[0;1] \middle| y(0) = 0, \ y(1) = 0\right\}.$$

Pentru integrandul $F = y^2(x) + y'^2(x) + 2y(x)e^x$ avem $F_y = 2y + 2e^x$, $F_{y'} = 2y'$, $\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 2y''$.

Ecuația Euler-Lagrange $y'' - y = e^x$ reprezintă o ecuație diferențială liniară neomogenă cu coeficienți constanți. Soluția acesteia se obține prin însumarea soluției generale a ecuației omogene asociate şi a unei soluții particulare a ecuației neomogene. Să rezolvăm ecuația omogenă $y'' - y = 0$. Ecuația caracteristică asociată $\lambda^2 - 1 = 0$ posedă două rădăcini reale distincte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, iar atunci soluția generală a ecuației omogene se va scrie sub forma $y_{SGEO}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. Soluția particulară a ecuației neomogene se va găsi prin metoda selecției (a se vedea Anexa). Întrucât în acest exemplu membrul drept al ecuației neomogene este de forma $f(x) = e^x$, iar conform metodei selecției, forma generală a acestuia este $f(x) = e^{\alpha x}\left(p_m(x)\cos(\beta x) + q_n(x)\sin(\beta x)\right)$ ($p_m(x)$ şi $q_n(x)$ sunt polinoame de grad m şi n respectiv), avem $\alpha = 1, \beta = 0$. Deoarece numărul $\lambda = \alpha \pm i\beta = 1$ este rădăcină a ecuației caracteristice de multiplicitate $s = 1$, soluția particulară a ecuației diferențiale neomogene se va căuta sub forma $y_{SPEN}(x) = axe^x$ $(a \in \mathbb{R})$. Înlocuind $y_{SPEN}(x)$ în ecuația neomogenă se obține:

$$2ae^x + axe^x - axe^x \equiv e^x \Rightarrow a = 1/2,$$

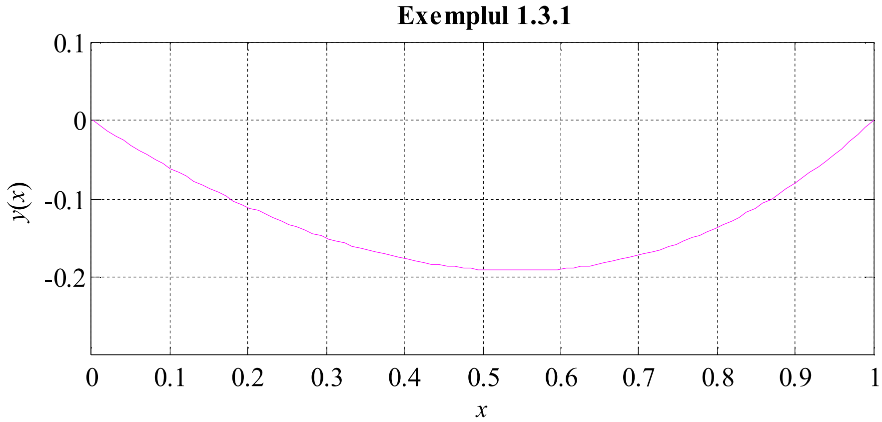
de unde găsim $y_{SPEN}(x) = \frac{1}{2}xe^x$, $y_{SGEN}(x) = y_{SGEO}(x) + y_{SPEN}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$. Folosind condițiile la extremități se află constantele c_1 şi c_2:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e + c_2 e^{-1} + 0.5e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0.5e^2/\left(1 - e^2\right) \\ c_2 = -0.5e^2/\left(1 - e^2\right) \end{cases}.$$

Astfel unica extremală admisibilă a funcţionalei este

$$y^*(x)=\frac{0.5e^2}{1-e^2}e^x-\frac{0.5e^2}{1-e^2}e^{-x}+0.5xe^x.$$

În anexe găsiţi fişierul MATLAB ce dă soluţia problemei formulate în exemplul 1.3.1, rezolvând ecuaţia Euler-Lagrange prin metodă analitică exactă şi desenează graficul extremalei admisibile:



Remarca 1.3.3. În cazul în care $F(x,y(x),y'(x))\in C^2(\Omega)$, ţinând cont că derivata $\varphi'(0)$ este variaţia de ordinul întâi $\delta I[y^*(x);\delta y(x)]$ a funcţionalei (1.3.2) în punctul $y^*(x)$, obţinem formula:

$$\delta I[y^*(x);\delta y(x)]=\int_a^b\left\{F_y\left(x,y^*(x),{y^*}'(x)\right)-\frac{d}{dx}F_{y'}\left(x,y^*(x),{y^*}'(x)\right)\right\}\delta y(x)dx. \qquad (1.3.10)$$

Într-adevăr, dacă admitem că $F(x,y(x),y'(x))\in C^2(\Omega)$, atunci are loc reprezentarea (integrăm prin părţi):

$$\int_a^b F_{y'}\left(x,y^*(x),{y^*}'(x)\right)\delta y'(x)dx=\left(\delta y(x)F_{y'}\left(x,y^*(x),{y^*}'(x)\right)\right)\Big|_{x=a}^{x=b}-\int_a^b\delta y(x)\frac{d}{dx}F_{y'}\left(x,y^*(x),{y^*}'(x)\right)dx.$$

Datorită faptului că $\delta y(a)=\delta y(b)=0$, primul termen din membrul drept al ultimei egalităţi este nul. Acum, ţinând cont de relaţia (1.3.8), obţinem (1.3.10). ■

1.3.2. Integrale prime ale ecuaţiei Euler-Lagrange

Soluţia ecuaţiei diferenţiale Euler-Lagrange (prescurtat EEL) se exprimă prin quadraturi elementare doar în cazuri particulare. Vom evidenţia, totuşi, câteva cazuri simple în care EEL admite diminuare a ordinului.

1) *Integrandul* $F=F(x,y(x),y'(x))$ *nu depinde explicit de* x *şi* $y(x)$.

Fie $F=F(y'(x))$. Atunci, utilizând forma extinsă (1.3.9) a EEL, vom avea

$$F_{y'y'}\left(y'(x)\right)y''(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y''(x)=0\\ F_{y'y'}\left(y'(x)\right)=0\end{array}\right..$$

Soluţia generală a ecuaţiei $y''(x)=0$ este (se obţine integrând de două ori ambii membri ai ecuaţiei)

$$y(x)=c_1x+c_2 \quad (c_1,c_2\in\mathbb{R}). \tag{1.3.11}$$

Condiția $F_{y'y'}\left(y'(x)\right)=0$ ne dă o ecuație diferențială ordinară de ordinul I. Dacă aceasta are rădăcini reale de forma $y'(x)=k_i$, atunci familia de drepte $y(x)=k_ix+c$ $\left(c\in\mathbb{R}\right)$ se conține în familia (1.3.11). Prin urmare, soluția generală a EEL în cazul menționat este dată de relația (1.3.11).

Exemplul 1.3.2. *Să se afle extremalele admisibile ale funcționalei*

$$I[y(x)]=\int_0^2\left(y'^4(x)+y'^3(x)\right)dx,\ y(x)\in D:=\left\{y(x)\in C^1[0;2]\,\middle|\,y(0)=0,\ y\left(2\right)=4\right\}.$$

Deoarece integrandul $F=y'^4(x)+y'^3(x)$ nu depinde explicit de x şi $y(x)$, utilizând forma extinsă a EEL avem $F_{y'y'}\left(y'(x)\right)y''(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y''(x)=0\\ F_{y'y'}\left(y'(x)\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y''(x)=0\\ 12y'^2(x)+6y'(x)=0\end{array}\right.$. Soluția generală a ecuației $y''(x)=0$ este $y(x)=c_1x+c_2,\ c_1,c_2\in\mathbb{R}$. Ecuația diferențială ordinară de ordinul întâi $12y'^2(x)+6y'(x)=0$ are următoarele soluții în raport cu $y'(x)$: $y'(x)=0$ şi $y'(x)=-1/2$. Familiile de drepte $y(x)=c_3$ şi $y(x)=-x/2+c_4$ nu aparțin MFA întrucât nu satisfac condițiile la extremități. Prin urmare, familia $y(x)=c_1x+c_2$ reprezintă soluția generală a EEL. Determinăm coeficienții c_1 şi c_2 din condițiile la extremități: $\begin{cases}y(0)=0\\ y(2)=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c_2=0\\ 2c_1+c_2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c_1=2\\ c_2=0\end{cases}$. Prin urmare, funcția $y^*(x)=2x$ este extremală admisibilă.

2) *Integrandul $F=F(x,y(x),y'(x))$ nu depinde explicit de x şi $y'(x)$, sau alt caz ce conduce către acelaşi rezultat - F nu depinde explicit de $y'(x)$.*

Fie $F=F(y(x))$ sau $F=F(x,y(x))$. Atunci, în primul caz EEL ia forma $F_y(y(x))=0$, iar în cel de-al doilea $F_y(x,y(x))=0$. Soluțiile acestor ecuații nu conțin elemente arbitrare şi, de aceea, în general vorbind, nu satisfac condițiile la extremități, adică nu există extremale admisibile ale funcționalei. Dacă însă soluțiile ecuațiilor menționate trec prin punctele de frontieră $(a;y_a)$ şi $(b;y_b)$, atunci acestea sunt extremale admisibile.

Exemplul 1.3.3. *Să se afle extremalele admisibile ale funcționalei*

$$I[y(x)]=\int_1^2\left(y^2(x)+y(x)\right)dx,\ y(x)\in D:=\left\{y(x)\in C^1[1;2]\,\middle|\,y(1)=0,\ y\left(2\right)=1\right\}.$$

Deoarece integrandul $F=y^2(x)+y(x)$ nu depinde explicit de x şi $y'(x)$, EEL ia forma $F_y(y(x))=0\Leftrightarrow 2y(x)+1=0\Leftrightarrow y(x)=-1/2$. Problema formulată nu are soluții, deoarece curba $y(x)=-1/2$ nu satisface condițiile la extremități $y(1)=0,\ y\left(2\right)=1$.

Exemplul 1.3.4. *Să se afle extremalele admisibile ale funcționalei*

$$I[y(x)]=\int_0^{\pi/2}y(x)(2x-y(x))dx,$$

a) $y(x)\in D:=\left\{y(x)\in C^1[0;\pi/2]\,\middle|\,y(0)=0,\ y(\pi/2)=\pi/2\right\}$; *b)* $y(x)\in D:=\left\{y(x)\in C^1[0;\pi/2]\,\middle|\,y(0)=0,\ y(\pi/2)=1\right\}$.

Deoarece integrandul $F=y(x)(2x-y(x))$ nu depinde de $y'(x)$, EEL ia forma $F_y(x,y(x))=0 \Leftrightarrow 2x-2y(x)=0 \Leftrightarrow y(x)=x$. În cazul a) pentru funcția $y(x)$ se îndeplinesc condițiile la extremități $y(0)=0,\ y(\pi/2)=\pi/2$, prin urmare, funcția $y(x)=x$ este extremală admisibilă a funcționalei $I[y(x)]$ în problema de extrem dată. În cazul b) însă, funcția $y(x)$ nu satisface condițiile la extremități şi, de aceea, nu reprezintă o extremală admisibilă.

3) *Integrandul* $F=F(x,y(x),y'(x))$ *nu depinde explicit de variabila* x.

Fie $F=F(y(x),y'(x))$. Atunci avem

$$\frac{d}{dx}\left(y'F_{y'}-F\right)=y''F_{y'}+y'\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)-F_x-F_y y'-F_{y'}y''=-y'\left(F_y-\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)\right)-F_x \qquad (1.3.12)$$

Dacă funcția $y(x)$ este extremală a funcționalei, atunci aceasta este soluție a EEL. Ținând cont de aceasta şi că $F_x=0$, din relația (1.3.12) deducem $\frac{d}{dx}\left(y'(x)F_{y'}(y(x),y'(x))-F(y(x),y'(x))\right)=0$, de unde obținem integrala primă

$$y'(x)F_{y'}(y(x),y'(x))-F(y(x),y'(x))=c\equiv const\,, \qquad (1.3.13)$$

care se numeşte integrala energiei pentru funcționala I (termen care îşi are originea în mecanică). Membrul stâng al ecuației (1.3.13) este o funcție de $y(x)$ şi $y'(x)$, dar care nu depinde explicit de variabila x. Dacă se reuşeşte să se rezolve această ecuație diferențială de ordinul I în raport cu derivata $y'(x)$, adică se obține o relație de forma $y'(x)=\varphi(y(x),c),\ c\equiv const$, atunci, ținând cont că $y'(x)=dy/dx$, obținem extremalele funcționalei sub forma $x=\int\frac{1}{\varphi(y,c)}dy$.

Remarca 1.3.4. La obținerea integralei energiei pentru funcționala $I[y(x)]$ s-a admis suplimentar că există derivata a doua $y''(x)$. Integrala energiei posedă o extremală în plus $y(x)\equiv const$.

Exemplul 1.3.5. *Să se afle extremalele admisibile ale funcționalei*

$$I[y(x)]=\int_0^1 y(x)y'^2(x)dx,\ y(x)\in D:=\left\{y(x)\in C^1[0;1]\,\middle|\,y(0)=1,\ y(1)=\sqrt[3]{4}\right\}.$$

Deoarece integrandul $F=y(x)y'^2(x)$ nu depinde explicit de variabila x, în baza celor spuse mai sus, EEL posedă integrala primă de forma (3.1.13):

$$y'(x)F_{y'}(y(x),y'(x))-F(y(x),y'(x))=c \Leftrightarrow y'(x)2y(x)y'(x)-y(x)y'^2(x)=-c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(x)y'^2(x)=-c:=c_1\,. \qquad (1.3.14)$$

Soluția generală a acestei ecuații diferențiale o vom obține efectuând substituția

$y'(x) = dy/dx = \tau$. Atunci ecuația (1.3.14) ia forma $y(x)\tau^2 = c_1$, de unde găsim $y(x) = c_1/\tau^2$. Pentru diferențiala dy avem: $dy = d\left(c_1/\tau^2\right) = -2c_1\tau^{-3}d\tau$. Atunci $dx = dy/\tau = -2c_1\tau^{-4}d\tau$, de unde, integrând în ambii membri, obținem $x = \frac{2c_1}{3\tau^3} + c_2$ sau $\tau^3 = \frac{2c_1}{3(x-c_2)}$. Deoarece $y(x) = c_1/\tau^2$ avem că $y(x) = c_1 \Big/ \sqrt[3]{\left(\frac{2c_1}{3(x-c_2)}\right)^2} = c_1\sqrt[3]{\frac{9(x-c_2)^2}{4c_1^2}} = \sqrt[3]{\frac{9(x-c_2)^2}{4}c_1}$ este soluția generală a EEL. Determinăm coeficienții c_1 şi c_2 din condițiile la extremități:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = \sqrt[3]{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{9}{4}c_2^2c_1} = 1 \\ \sqrt[3]{\frac{9}{4}(1-c_2)^2 c_1} = \sqrt[3]{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{4}c_2^2c_1 = 1 \\ \frac{9}{4}(1-c_2)^2 c_1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 4/9c_2^2 \\ 3c_2^2 + 2c_2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 4/9c_2^2 \\ \left[\begin{array}{l} c_2 = -1 \\ c_2 = 1/3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c_1 = 4/9 \\ c_2 = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = 1/3 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Drept rezultat obținem două extremale admisibile: $y^*(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$ şi $y^*(x) = \sqrt[3]{9(x-1/3)^2} = \sqrt[3]{(3x-1)^2}$.

4) *Integrandul* $F = F(x, y(x), y'(x))$ *nu depinde explicit de funcția* $y(x)$.

Fie $F = F(x, y'(x))$. Atunci EEL ia forma $\frac{d}{dx}\left(F_{y'}(x, y'(x))\right) = 0$, de unde găsim integrala primă

$$F_{y'}(x, y'(x)) = c = const. \qquad (1.3.15)$$

Relația (1.3.15) este cunoscută ca integrala impulsului, termen care provine din mecanica clasică. Ea reprezintă o ecuație diferențială de ordinul I ce nu conține explicit funcția necunoscută $y(x)$. Dacă această ecuație o vom rezolva în raport cu derivata $y'(x)$, vom obține $y'(x) = \psi(x, c),\ c \equiv const$, de unde găsim extremala $y(x) = \int \psi(x, c)dx$.

Exemplul 1.3.6. *Să se afle extremalele admisibile ale funcționalei*

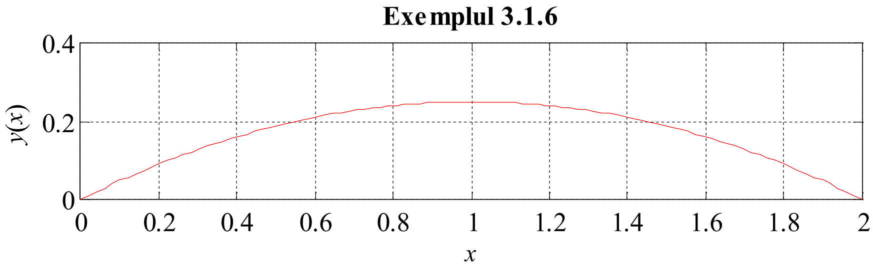
$$I[y(x)] = \int_0^2 \left(y'^2(x) + xy'(x)\right)dx,\ y(x) \in D := \left\{y(x) \in C^1[0;2] \,\middle|\, y(0) = 0,\ y(2) = 0\right\}.$$

Deoarece integrandul $F = y'^2(x) + xy'(x)$ nu depinde explicit de funcția necunoscută $y(x)$, EEL are forma $\frac{d}{dx}\left(F_{y'}(x, y'(x))\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(2y'(x) + x\right) = 0$, de unde găsim integrala primă $2y'(x) + x = c_1$. Rezolvăm ecuația obținută în raport cu $y'(x)$: $y'(x) = c_1/2 - x/2$ şi apoi integrăm în ambii membri. Obținem $y(x) = c_1x/2 - x^2/4 + c_2$. Determinăm coeficienții c_1 şi c_2 din condițiile la extremități:

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1-1+c_2=0 \\ c_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ c_2=0 \end{cases}.$$

Astfel se obține unica extremală admisibilă $y^*(x)=-x^2/4+x/2$.

În anexe găsiți fișierul MATLAB ce dă soluția analitică exactă a problemei formulate în exemplul 1.3.6 și desenează graficul extremalei admisibile:



5) Integrandul $F=F(x,y(x),y'(x))$ este funcție liniară în raport cu $y'(x)$.

Fie funcția F liniară în raport cu $y'(x)$: $F=P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x)$. Atunci

$$F_y-\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)=P_y+Q_y y'-\frac{dQ}{dx}=P_y+Q_y y'-Q_x-Q_y y'=P_y-Q_x$$

și în acest caz EEL ia forma

$$P_y(x,y(x))-Q_x(x,y(x))=0\,. \tag{1.3.16}$$

Dacă în careva domeniu D al planului xOy ultima relație se verifică identic, atunci aceasta este condiția necesară și suficientă pentru ca funcția F să fie diferențială totală $F=\frac{d}{dx}G(x,y(x))$. Deoarece avem $F=G_x(x,y(x))+G_y(x,y(x))y'(x)$ rezultă că $P=G_x,\,Q=G_y$.

Vom considera că funcția $G\in C^2$. Atunci $G_{xy}=G_{yx}$. Avem $F=G_x+G_y y'$ și

$$F_y-\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)=G_{yx}+G_{yy}y'-\frac{d}{dx}\left(G_y\right)=G_{yx}+G_{yy}y'-G_{xy}-G_{yy}y'=0\,.$$

Astfel condiția necesară și suficientă pentru ca să se verifice identic EEL este $F=\frac{d}{dx}G(x,y(x))$.

Remarca 1.3.5. Fie $I[y(x)]=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$ și $J[y(x)]=\int_a^b H(x,y(x),y'(x))dx$, unde $F,H\in C^2$. EEL pentru funcționalele $I[y(x)]$ și $J[y(x)]$ sunt echivalente atunci și numai atunci când $H-F=\frac{d}{dx}G(x,y(x))$.

Ca și în cazul 2) ecuația (1.3.16) nu este o ecuație diferențială. Soluția ei, la general vorbind, nu satisface condițiile la extremități, și, prin urmare, problema de calcul variațional, de regulă, nu are soluții în clasa funcțiilor continue.

În cazul în care F este diferențială totală $F=\frac{d}{dx}G(x,y(x))$ avem

$$I[y(x)]=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx=\int_a^b \frac{d}{dx}G(x,y(x))dx=G(x,y(x))\Big|_{x=a}^{x=b}=G(b,y_b)-G(a,y_a),\ \ y_a=y(a),y_b=y(b),$$

adică integrala $I[y(x)]$ nu depinde de curba pe care se integrează (de alegerea funcției $y(x)$). Valoarea funcționalei $I[y(x)]$ este constantă pentru orice curbă admisibilă, iar problema variațională îşi pierde sensul.

Exemplul 1.3.7. *Să se cerceteze la extrem funcționala*

$$I[y(x)]=\int_a^b \left(y^2(x)+2xy(x)y'(x)\right)dx,\ \ y(x)\in D:=\left\{y(x)\in C^1[a;b]\middle|\,y(a)=A,\ y(b)=B\right\}.$$

Integrandul F este o funcție liniară în raport cu $y'(x)$. Avem $P_y(x,y(x))=2y(x)$, $Q_x(x,y(x))=2y(x)$ şi $P_y(x,y(x))-Q_x(x,y(x))\equiv 0$. Atunci integrandul $\left(y^2(x)+2xy(x)y'(x)\right)dx$ reprezintă o diferențială totală şi, prin urmare, integrala nu depinde de curba de integrare:

$$I[y(x)]=\int_a^b \left(y^2(x)+2xy(x)y'(x)\right)dx=\int_a^b \left(y^2(x)dx+2xy(x)dy\right)=\int_{(a,A)}^{(b,B)} d\left(xy^2(x)\right)=xy^2(x)\Big|_{x=a}^{x=b}=bB^2-aA^2,$$

pentru orice curbă de integrare $y(x)$ ce trece prin punctele $(a;A)$ şi $(b;B)$. Astfel, problema dată de calcul variațional îşi pierde sensul.