1.4. Condiţii suficiente de extrem local al funcţionalei

1.4.1. Condiții suficiente generale de extrem local al funcționalei

1.4.2. Condiții necesare şi suficiente de extrem local în PECV

În această secțiune se vor stabili condiții suficiente de extrem al funcționalelor definite pe submulțimi ale spațiilor liniare normate. Pentru problema elementară de calcul variațional se vor formula câteva condiții necesare de extrem local cu scopul ca acestea fiind privite în ansamblu, să permită sintetizarea unor condiții care să fie suficiente.

1.4.1. Condiţii suficiente generale de extrem local al funcţionalei

Conform condițiilor necesare de extrem al funcționalei (a se vedea teoremele 1.2.4 şi 1.2.5) prima variație a acesteia în punctul cercetat trebuie să fie egală cu zero, iar a doua variație să fie funcțională semipozitiv definită (sau seminegativ definită) pentru orice valori ale argumentului $\delta y \in X$. De menționat că aceste condiții (fiind privite în ansamblu) nu sunt suficiente pentru realizarea unui extrem local. În acest sens se poate urmări

Exemplul 1.4.1. *Fie funcționala* $I[y(x)] = \int_0^1 y^2(x)(x - y(x))dx,\ y \in D := \{ y \in C[0;1] \,|\, y(0) = y(1) = 0 \}$. *Să se arate că:*

1) *funcția* $y^*(x) \equiv 0$ *reprezintă unica extremală admisibilă a funcționalei* $I[y(x)]$*;*
2) *variația de ordinul doi a funcționalei* $\delta^2 I[y^*(x); \delta y(x)]$ *în* $y^*(x) \equiv 0$ *este funcțională semipozitiv definită pentru orice valori ale argumentului* $\delta y \in C[0;1]$*;*
3) *funcția* $y^*(x) \equiv 0$ *nu realizează un minim local al funcționalei* $I[y(x)]$.

1) EEL ia forma $2xy(x) - 3y^2(x) = 0$. Soluțiile ei sunt funcțiile $y(x) = 0$ şi $y(x) = 2x/3$. Însă extremală admisibilă este funcția $y^*(x) \equiv 0$ (întrucât numai aceasta verifică condițiile la extremități).

2) Variația de ordinul doi a funcționalei $I[y(x)]$ în $y^*(x)$ este $\delta^2 I[y^*(x); \delta y(x)] =$ $= \int_0^1 \left(2x - 6y^*(x)\right) \delta y^2(x) dx$. Pentru extremala $y^*(x) \equiv 0$ avem $\delta^2 I[0; \delta y(x)] = \int_0^1 2x \delta y^2(x) dx$. Se observă că pentru $x \in [0;1]$ are loc $\delta^2 I[0; \delta y(x)] \geq 0,\ \forall \delta y \in C[0;1]$.

3) Se va arăta că funcționala $I[y(x)]$ ia valori negative în punctele oricărei vecinătăți a lui $y^*(x) \equiv 0$. Într-adevăr, pentru orice $\varepsilon > 0$, considerând funcția continuă

$y_\varepsilon(x)=\begin{cases}-x+\varepsilon, & 0\le x<\varepsilon\\ 0, & x\ge\varepsilon\end{cases}$, avem $I[y_\varepsilon(x)]=\int_0^\varepsilon(\varepsilon-x)^2(2x-\varepsilon)dx=-\frac{1}{6}\varepsilon^4<0$. Întrucât $I[y^*(x)]=0$, se obține $I[y_\varepsilon(x)]-I[y^*(x)]<0$, $\forall\varepsilon>0$, ceea ce înseamnă că $y^*(x)\equiv 0$ nu realizează un minim local al funcționalei $I[y(x)]$. ■

Condițiile necesare menționate reprezintă o generalizare a respectivelor condiții pentru funcțiile de mai multe variabile (inclusiv de o variabilă). E firească întrebarea dacă se pot obține şi condițiile suficiente de extrem al funcționalei ca o generalizare a respectivelor condiții pentru funcțiile de mai multe variabile (prescurtat FMV).

Condițiile suficiente de extrem al FMV se bazează pe comportarea diferențialei a doua a funcției în punctul cercetat. Dacă funcția $f(\bar{x})$ $(\bar{x}\in\mathbb{R}^n)$ este de două ori diferențiabilă Fréchet, atunci are loc reprezentarea

$$f(\bar{x}+\bar{h})=f(\bar{x})+f'(\bar{x})\bar{h}+\frac{1}{2}f''(\bar{x})\bar{h}^2+O\left(\|\bar{h}\|^2\right),$$

în care $f'(\bar{x})\bar{h}=(\bar{l},\bar{h})$, $\bar{l}$ - gradientul funcției f în punctul $\bar{x}$, iar $f''(\bar{x})\bar{h}^2=\left(H\bar{h},\bar{h}\right)$, H - hessiana (matricea derivatelor parțiale de ordinul 2) în punctul $\bar{x}$. Dacă $\bar{x}$ - punct staționar (adică $\bar{l}=\bar{0}$), iar hessiana este pozitiv definită (adică $\left(H\bar{h},\bar{h}\right)\ge\alpha\|\bar{h}\|^2$, $\forall\bar{h}\in\mathbb{R}^n,\alpha>0$), atunci [2]

$$f(\bar{x}+\bar{h})-f(\bar{x})\ge(\alpha-\varepsilon)\|\bar{h}\|^2,$$

unde ε poate fi ales oricât de mic, în particular mai mic decât α dacă vectorul $\bar{h}$ are normă suficient de mică. Procedura de obținere a rezultatului menționat nu depinde de dimensiunea spațiului şi poate fi generalizată (fără modificări esențiale) şi pentru cazul funcționalei $I[y]$, cu condiția ca să fie posibilă transformarea spațiului de elemente y în unitar (adică să se introducă produsul scalar). Condițiile suficiente de extrem se construiesc în baza comportării variației de ordinul doi a funcționalei în vecinătatea extremalei cercetate.

Fie $\left(X,\|\cdot\|\right)$ un spațiu liniar normat.

Definiția 1.4.1. Vom spune că o funcțională pătratică $H[y]:X\to\mathbb{R}$ este tare pozitiv (sau negativ) definită dacă există aşa un număr $c>0$ $(c<0)$ astfel încât pentru orice $y\in X$ se îndeplineşte inegalitatea

$$H[y]\ge c\|y\|^2\ \left(H[y]\le c\|y\|^2\right).$$

În cazul finit-dimensional funcționala pătratică reprezintă o formă pătratică, iar funcționala pătratică tare pozitiv definită este şi pozitiv definită (în calitate de

constantă c se poate alege cea mai mică valoare proprie a matricei formei pătratice) şi reciproc. Însă în cazul infinit-dimensional această proprietate nu are loc.

Fie D- MEA într-o problemă de extrem al funcționalei $I[y]$ ($D \subset X$). Următoarea teoremă stabileşte condiții suficiente generale de extrem local al funcționalei.

Teorema 1.4.1. *Dacă funcționala $I: D \to \mathbb{R}$ este de două ori F-diferențiabilă în punctul $y^* \in D$, y^* este punct staționar, iar G-diferențiala de ordinul doi $\delta^2 I[y^*;\delta y]$ (în y^* pe orice direcție $\delta y \in X$) este tare pozitiv (negativ) definită, atunci y^* realizează un minim (maxim) local al funcționalei $I[y]$ pe D.*

Demonstrație. Teorema se va demonstra pentru cazul în care y^* realizează un minim local al funcționalei $I[y]$ (pentru cazul de maxim local raționamentul este similar). Întrucât $y^* \in D$ este un punct staționar al funcționalei $I[y]$, conform teoremei 1.2.4, variația de ordinul întâi în punctul $y^* \in D$ este egală cu zero $\delta I[y^*;\delta y] = 0$. Totodată, deoarece funcționala $I[y]$ este de două ori F-diferențiabilă, are loc următoarea reprezentare pentru creşterea funcționalei ΔI (a se vedea definiția (1.2.18)):

$$\Delta I = \delta^2 I[y^*;\delta y]/2 + \varepsilon_2[y^*;\delta y]\|\delta y\|^2, \tag{1.4.1}$$

unde

$$\varepsilon_2[y^*;\delta y] \to 0 \text{ când } \|\delta y\| \to 0. \tag{1.4.2}$$

Conform ipotezei teoremei funcționala admite variație de ordinul doi $\delta^2 I[y^*;\delta y]$ în punctul $y^* \in D$ pe orice direcție $\delta y \in X$ şi funcționala $\delta^2 I[y^*;\delta y]$ este tare pozitiv definită, deci există constanta $c > 0$ astfel încât $\delta^2 I[y^*;\delta y] \geq c\|\delta y\|^2$. În virtutea relației (1.4.2), pentru elemente δy de normă suficient de mică, vom avea $|\varepsilon_2[y^*;\delta y]| < c/4$, unde $c > 0$ este constanta prezentă în relația ce defineşte funcționala $\delta^2 I[y^*;\delta y]$ ca tare pozitiv definită. Deoarece $-c/4 < \varepsilon_2[y^*;\delta y] < c/4$, rezultă că

$$\Delta I \geq \left(c/2 + \varepsilon_2[y^*;\delta y]\right)\|\delta y\|^2 \geq (c/2 - c/4)\|\delta y\|^2 = (c/4)\|\delta y\|^2 \geq 0$$

pentru toți δy suficient de mici în normă. Astfel, creşterea funcționalei ia valori nenegative pe o vecinătate din D a elementului y^*, adică acesta din urmă realizează un minim local al funcționalei $I[y]$. ■

1.4.2. Condiţii necesare şi suficiente de extrem local în PECV

De remarcat că nu e simplă procedura de verificare a existenței F-diferențialei de ordinul doi, precum şi a faptului că aceasta reprezintă o funcțională tare pozitiv definită. Prin urmare, pentru funcționale concrete este necesară stabilirea unui criteriu mai eficient ce dă condiții suficiente de extrem local. De remarcat că chiar şi în

cazul FMV, condiția ca hessiana să fie pozitiv definită se formula sub o formă comodă pentru verificare (criteriul lui Sylvester).

Să considerăm PECV:

$$I[y(x)]=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx \to extr,$$
$$y\in D:=\left\{y\in C^1[a;b] \,\middle|\, (x,y(x),y'(x))\in\Omega,\ \forall x\in[a;b],\ y(a)=y_a, y(b)=y_b, y_a,y_b\in\mathbb{R}\right\}, \tag{1.4.3}$$

unde $\Omega:=[a;b]\times\Delta_2$ $\left([a;b]\subset\mathbb{R},\ \Delta_2\subset\mathbb{R}^2\right)$ o mulțime deschisă, iar $F:\Omega\to\mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2. În aceste condiții funcționala $I[y(x)]$ este de două ori F-diferențiabilă în orice punct $y^*\in D$, prin urmare, și de două ori G-diferențiabilă. Să calculăm variația de ordinul doi a funcționalei $I[y(x)]$, folosind în acest scop definiția în sensul derivatei după parametru. Aşadar, fie $y^*\in D$ punct de extrem al funcționalei $I[y(x)]$. Să considerăm funcția de o singură variabilă

$$\varphi(\alpha):=I\left[y^*(x)+\alpha\delta y(x)\right]=\int_a^b F(x,y^*(x)+\alpha\delta y(x),y^{*\prime}(x)+\alpha\delta y'(x))dx,$$

unde $\delta y\in H_1$ este fixată, iar parametrul numeric α aparține unui astfel de interval, încât $y(x):=y^*(x)+\alpha\delta y(x)$ să aparțină MFA D. Ținând cont de condițiile impuse asupra integrandului F se deduce că funcția $\varphi(\alpha)$ este de două ori derivabilă în punctul $\alpha=0$, iar valoarea extremală o obține pentru $\alpha=0$. Atunci, în baza condițiilor necesare de ordinul I de extrem al funcției de o singură variabilă $\varphi(\alpha)$ (teorema lui Fermat), dar şi a condițiilor necesare de ordinul II, se deduce că are loc relația $\delta I[y^*(x);\delta y(x)]=\varphi'(0)=0$, iar pentru $\delta^2 I[y^*(x);\delta y(x)]$ avem:

$\delta^2 I[y^*(x);\delta y(x)]=\varphi''(0)\geq 0$ dacă $y^*(x)$ realizează un minim local al funcționalei;

$\delta^2 I[y^*(x);\delta y(x)]=\varphi''(0)\leq 0$ dacă $y^*(x)$ realizează un maxim local al funcționalei.

Conform relației (1.2.15) pentru variația de ordinul doi avem formula:

$$\delta^2 I[y^*(x);\delta y(x)]=\varphi''(0)=\int_a^b\Big(F_{yy}\left(x,y^*(x),y^{*\prime}(x)\right)(\delta y(x))^2+$$
$$+2F_{yy'}\left(x,y^*(x),y^{*\prime}(x)\right)\delta y(x)\delta y'(x)+F_{y'y'}\left(x,y^*(x),y^{*\prime}(x)\right)(\delta y'(x))^2\Big)dx.$$

Să presupunem acum că funcția $F\in C^3$. Integrând prin părți termenul al doilea din membrul drept al ultimei relații se obține

$$\int_a^b 2F_{yy'}\delta y\delta y'dx=\int_a^b F_{yy'}d\left((\delta y)^2\right)=F_{yy'}(\delta y)^2\Big|_{x=a}^{x=b}-\int_a^b\frac{d}{dx}\left(F_{yy'}\right)(\delta y)^2\,dx.$$

Întrucât $\delta y\in H_1$ avem

$$\delta^2 I[y^*(x);\delta y(x)]=\int_a^b\left(A(x)(\delta y(x))^2+B(x)(\delta y'(x))^2\right)dx, \tag{1.4.4}$$

unde $A(x):=F_{yy}\left(x,y^*(x),y^{*\prime}(x)\right)-\frac{d}{dx}\left(F_{yy'}\left(x,y^*(x),y^{*\prime}(x)\right)\right)$, $B(x):=F_{y'y'}\left(x,y^*(x),y^{*\prime}(x)\right)$.

Astfel verificarea condiției necesare de extrem al funcționalei $I[y(x)]$ prin intermediul variației de ordinul II (adică a condiției $\delta^2 I[y^*(x);\delta y(x)]\geq 0$ în cazul în care $y^*(x)$ realizează un minim local şi a condiției $\delta^2 I[y^*(x);\delta y(x)]\leq 0$ în cazul în care $y^*(x)$ realizează un maxim local) s-a redus la problema aflării extremului funcționalei pătratice (1.4.4) în raport cu funcția $\delta y(x)$.

I. Condiţia necesară Legendre

Întrucât pentru funcții $\delta y\in H_1$ în extremitatea de stânga are loc $\delta y(a)=0$ avem $\delta y(x)=\int_a^x \delta y'(t)dt$, de unde rezultă $|\delta y(x)|\leq\int_a^x|\delta y'(t)|dt\leq\max_{t\in[a;b]}|\delta y'(t)|(b-a)$. Astfel are loc

Remarca 1.4.1. Dacă funcția $\delta y'(x)$ ($\delta y\in H_1$) ia valori mici în modul pe $[a;b]$, atunci la fel se comportă pe $[a;b]$ şi funcția $\delta y(x)$.

Reciproca acestei afirmații nu este adevărată, deoarece faptul că funcția ia valori mici nu înseamnă că şi derivata ei ia valori mici (de exemplu, funcția $\delta y(x)=\varepsilon\sin(x/\varepsilon)$). Aceasta înseamnă că în reprezentarea (1.4.4) a variației de ordinul doi a funcționalei rolul principal îl joacă termenul $B(x)(\delta y'(x))^2$ în sensul că acesta poate fi esențial mai mare decât termenul $A(x)(\delta y(x))^2$, dar nu poate fi esențial mai mic (atunci când $A(x)\neq 0$). Variația de ordinul II va lua valori de acelaşi semn sau de semne diferite în dependență de semnul valorilor funcției $B(x)$.

Definiția 1.4.2. Extremala $y^*(x)$ satisface condiția lui Legendre (condiția tare a lui Legendre) dacă $B(x)\geq 0$ $(sau\ \leq 0)$, $\forall x\in[a;b]$ $\left(B(x)>0\ (sau\ <0),\ \forall x\in[a;b]\right)$.

Teorema 1.4.2. *(Condiția necesară Legendre) Dacă în PECV (1.4.3) funcția admisibilă $y^*(x)$ realizează un minim (maxim) local al funcționalei $I[y(x)]$, în ipoteza că funcția F este de clasă C^2, atunci se satisface condiția lui Legendre:*

$$B(x)\geq 0\ (\leq 0),\ \forall x\in[a;b]. \tag{1.4.5}$$

Demonstrație. Conform teoremei 1.2.5, dacă funcția admisibilă $y^*(x)$ realizează un minim local al funcționalei $I[y(x)]$, atunci variația de ordinul doi a funcționalei (în cazul dat, a se vedea relația (1.4.4)), definită pe mulțimea de funcții $\delta y\in H_1$, este semipozitiv definită $\delta^2 I[y^*(x);\delta y(x)]\geq 0$. Ținând cont de aceasta şi de faptul că funcția $B\in C[a;b]$ (amintim că $F\in C^2$), urmează să se arate că are loc relația (1.4.5). Demonstrația se va realiza de la contrariu. Să admitem că nu se satisface condiția (1.4.5), adică există $x_0\in(a;b)$ astfel încât $B(x_0)<0$. Întrucât $B\in C[a;b]$ există un $\sigma>0$ astfel încât pentru orice $x\in(x_0-\sigma;x_0+\sigma)\subset[a;b]$ are loc $B(x)\leq c<0$. Să arătăm că variația de ordinul doi (1.4.4)

poate să ia valoare negativă. Pentru aceasta vom alege funcția $\delta y(x)$ astfel încât în relația (1.4.4) rolul principal să îl joace termenul $B(x)(\delta y'(x))^2$, iar termenul $A(x)(\delta y(x))^2$ să ia valori mici. Să considerăm funcția [3, p.333]

$$\delta y(x)=\begin{cases}\sin^2(\pi(x-x_0+\sigma)/(2\sigma)) & pentru\ \ x\in\left(x_0-\sigma;x_0+\sigma\right)\\ 0 & pentru\ \ x\in[a;x_0-\sigma]\cup[x_0+\sigma;b]\end{cases}.$$

Au loc relațiile:

$$\delta y\in H_1,\ (\delta y(x))^2\le 1,\ \delta y'(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{\sigma}\sin\left(\dfrac{\pi\left(x-x_0+\sigma\right)}{2\sigma}\right)\cos\left(\dfrac{\pi\left(x-x_0+\sigma\right)}{2\sigma}\right) & pentru\ \ x\in\left(x_0-\sigma;x_0+\sigma\right),\\ 0 \quad pentru\ \ x\in[a;x_0-\sigma]\cup[x_0+\sigma;b].\end{cases}$$

Deoarece $A(x)=F_{yy}\left(x,y^*(x),y^{*\prime}(x)\right)-\dfrac{d}{dx}\left(F_{yy'}\left(x,y^*(x),y^{*\prime}(x)\right)\right)\in C[a;b]$ are loc $\left|A(x)\right|\le M\ \ (M>0)$.

Atunci pentru variația de ordinul doi (1.4.4) avem:

$$\begin{aligned}\delta^2 I[y^*(x);\delta y(x)]&=\int_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma}A(x)(\delta y(x))^2dx+\int_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma}B(x)(\delta y'(x))^2dx\le\int_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma}\left|A(x)\right|dx+\int_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma}B(x)\left|\delta y'(x)\right|^2dx\le\\ &\le 2\sigma M+\frac{\pi^2}{\sigma^2}2\sigma c.\end{aligned}\tag{1.4.6}$$

Dacă $\sigma\to 0$, atunci primul termen din membrul drept al relației (1.4.6) va converge către zero, iar al doilea termen – către minus infinit. Astfel se obține $\delta^2 I[y^*(x);\delta y(x)]<0$ pentru funcția $\delta y(x)$ considerată şi σ suficient de mic. Contradicție. ■

Inegalitatea (1.4.5) reprezintă o condiție necesară, dar nu şi suficientă de extrem local.

Exemplul 1.4.1. *Să se arate că funcția* $y^*(x)\equiv 0$ *realizează un minim global al funcționalei* $I[y(x)]=\int_0^a\left(y'^4(x)+1\right)dx,\ y\in D:=\left\{y\in C^1[0;a]\,\middle|\,y(0)=y(a)=0\right\}\ (a>0)$ *şi pentru* $y^*(x)\equiv 0$ *se satisface condiția lui Legendre.*

EEL $y'^3(x)=c$ are soluția generală $y(x)=c_1x+c_2$. Ținând cont de condițiile la extremități se obține extremala admisibilă $y^*(x)\equiv 0$. Pentru orice $y\in D$ avem

$$I[y(x)]-I[y^*(x)]=\int_0^a\left(y'^4(x)+1\right)dx-\int_0^a 1dx=\int_0^a y'^4(x)dx\ge 0,$$

adică $y^*(x)\equiv 0$ realizează un minim global al funcționalei $I[y(x)]$. Deoarece $B(x)=12\left(y^{*\prime}(x)\right)^2=0,\ \forall x\in[0;a]$, se satisface condiția lui Legendre. ■

Exemplul 1.4.2. *Să se arate că extremala admisibilă* $y^*(x)\equiv 0$ *a funcționalei* $I[y(x)]=\int_0^{5\pi/4}\left(y^2(x)-y'^2(x)\right)dx,\ \ y\in D:=\left\{y\in C^1[0;5\pi/4]\,\middle|\,y(0)=y(5\pi/4)=0\right\}$ *nu realizează un extrem local.*

Să considerăm şirul de funcții $y_n(x)=\frac{1}{n^2}\sin(4nx/5)$. Evident că $y_n(0)=y_n(5\pi/4)=0$. Atunci când $n\to\infty$ şirul $y_n(x)\to 0$, prin urmare, începând cu careva n, elementele $y_n(x)$ aparțin unei vecinătăți a curbei $y^*(x)\equiv 0$.

Să arătăm că $I[y_n(x)]-I[y^*(x)]<0$, ceea ce va însemna că $y^*(x)\equiv 0$ nu este punct de minim local al funcționalei $I[y(x)]$. Avem $y_n'(x)=\frac{4}{5n}\cos(4nx/5)$. Să observăm că $I[y^*(x)]=0$. Calculăm

$$I[y_n(x)]=\int_0^{5\pi/4}\frac{1}{n^4}\sin^2(4nx/5)dx-\int_0^{5\pi/4}\left(\frac{4}{5n}\right)^2\cos^2(4nx/5)dx=\frac{5\pi}{8n^2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{16}{25}\right).$$

Pentru $n\geq 2$ $(n\in\mathbb{N})$ avem $I[y_n(x)]<0$, de unde găsim $I[y_n(x)]-I[y^*(x)]<0$. Rezultă că extremala $y^*(x)\equiv 0$ nu realizează un minim local al funcționalei $I[y(x)]$.

Considerăm acum şirul de funcții $z_n(x)=\frac{1}{n}\sin(4x/5)$, care converge către zero când $n\to\infty$. Astfel, începând cu careva n, elementele $z_n(x)$ aparțin unei vecinătăți a curbei $y^*(x)\equiv 0$. Avem

$$I[z_n(x)]=\int_0^{5\pi/4}\frac{1}{n^2}\sin^2(4x/5)dx-\int_0^{5\pi/4}\frac{16}{25n^2}\cos^2(4x/5)dx=\frac{9\pi}{40n^2}>0.$$

Deci $I[z_n(x)]-I[y^*(x)]>0$, adică extremala $y^*(x)\equiv 0$ nu realizează nici maxim local al funcționalei $I[y(x)]$.

Cu toate acestea, pe extremala $y^*(x)\equiv 0$ se satisface condiția lui Legendre:

$$B(x)=-2<0,\ \forall x\in[0;5\pi/4].\ \blacksquare$$

II. Ecuaţia lui Jacobi. Condiţia necesară Jacobi

Direcția $\delta y(x)$ pentru care variația de ordinul doi $\delta^2 I[y^*,\delta y]$ (considerată ca funcțională de $\delta y(x)$) se anulează când $y^*(x)$ realizează un extrem al funcționalei $I[y]$ este extremală a lui $\delta^2 I[y^*;\delta y]$. Prin urmare, ea verifică EEL a acestei funcționale.

Definiția 1.4.3. EEL pentru funcționala $\delta^2 I[y^*;\delta y]$ (definită prin relația (1.4.4)) se numeşte ecuația lui Jacobi pentru funcționala $I[y]$ a problemei (1.4.3).

Ecuația lui Jacobi (prescurtat EJ) are forma

$$A(x)\delta y(x)-\frac{d}{dx}\left(B(x)\delta y'(x)\right)=0,\ x\in[a;b]. \qquad (1.4.7)$$

De remarcat că EJ este o EDLO de ordinul doi cu coeficienți continui. Funcția necunoscută $\delta y\in H_1$. Coeficienții prezenți în EJ se reprezintă sub forma desfăşurată

$$A(x)=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y\partial y'}-\frac{\partial^3 F}{\partial y^2\partial y'}y^{*\prime}-\frac{\partial^3 F}{\partial y\partial y'^2}y^{*\prime\prime},\ B(x)=\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2},$$

unde derivatele parțiale se calculează în punctele $(x, y^*(x), y^{*\prime}(x)),\ x \in [a;b]$.

Lema 1.4.1. *Dacă funcția $\delta y \in H_1$ este soluție a EJ (1.4.7), atunci are loc egalitatea $\delta^2 I[y^*;\delta y] = 0$.*

Demonstrație. Întrucât $A(x)\delta y(x) - \frac{d}{dx}\big(B(x)\delta y'(x)\big) \equiv 0$ pe $[a;b]$ ($\delta y(x)$ - soluție a EJ), rezultă că

$$\int_a^b \left(A(x)\delta y(x) - \frac{d}{dx}\big(B(x)\delta y'(x)\big) \right) \delta y(x) dx = 0 .$$

Utilizând procedeul integrării prin părți şi ținând cont că $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$, egalitatea de mai sus se poate scrie astfel:

$$0 = \int_a^b A(x)\big(\delta y(x)\big)^2 dx - \int_a^b \frac{d}{dx}\big(B(x)\delta y'(x)\big)\delta y(x) dx = \int_a^b A(x)\big(\delta y(x)\big)^2 dx - B(x)\delta y'(x)\delta y(x)\Big|_{x=a}^{x=b} +$$

$$+\int_a^b B(x)\big(\delta y'(x)\big)^2 dx = \int_a^b \left(A(x)\big(\delta y(x)\big)^2 + B(x)\big(\delta y'(x)\big)^2 \right) dx = \delta^2 I[y^*, \delta y] . \ \blacksquare$$

Lema 1.4.2. [9, p.105, p.260] *Fie $\delta y \in C^1[a;b]$ o soluție a EJ (1.4.7). Dacă există punctul $c \in [a;b]$ astfel încât $\delta y(c) = \delta y'(c) = 0$, atunci $\delta y(x) \equiv 0$ pe $[a;b]$.*

Demonstrație. Fie punctul $c \in [a;b]$ astfel încât pentru soluția $\delta y(x)$ a EJ avem $\delta y(c) = \delta y'(c) = 0$. Să considerăm problema lui Cauchy formată din EJ şi condițiile menționate în punctul c. Teorema lui Picard (a se vedea anexa) implică existența şi unicitatea soluției acestei probleme într-o vecinătate a punctului c. Prin urmare, această soluție trebuie să fie soluția trivială. Din teoria ecuațiilor diferențiale se știe că această soluție are o prelungire unică pe intervalul $[a;b]$ şi deci $\delta y(x) = 0,\ \forall x \in [a;b]$. $\blacksquare$

Să considerăm pe $[a;b]$ problema lui Cauchy

$$A(x)\delta y(x) - \frac{d}{dx}\big(B(x)\delta y'(x)\big) = 0,\ \delta y(a) = 0 . \qquad (1.4.8)$$

Evident că această problemă are soluție trivială $\delta y(x) \equiv 0$ pe $[a;b]$, dar pot exista şi alte soluții (netriviale). Dacă $\delta y(x)$ este o soluție netrivială a problemei (1.4.8), atunci şi $c\delta y(x)$ $(c = const \neq 0)$ este o soluție de acelaşi tip a acesteia. De aceea în continuare, ținând cont că în condițiile în care $\delta y(a) = 0$, iar $\delta y(x)$ nu este identic nulă pe $[a;b]$, avem $\delta y'(a) \neq 0$, se va impune condiția suplimentară $\delta y'(a) = 1$.

Definiția 1.4.4. Două puncte $(x_1; y^*(x_1))$ şi $(x_2; y^*(x_2))$ $(x_1, x_2 \in [a;b],\ x_1 < x_2)$ ale extremalei $y^*(x)$ a funcționalei (1.4.3) se numesc conjugate dacă EJ (1.4.7) admite o soluție $\delta y(x)$ astfel încât $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$, iar $\delta y(x)$ nu este identic nulă pe intervalul $(x_1; x_2)$.

Definiția 1.4.5. Extremala $y^*(x),\ x \in [a;b]$, a funcționalei $I[y]$ satisface condiția lui Jacobi

(condiția tare a lui Jacobi) dacă printre punctele $(x;y^*(x)), x\in(a;b), (x\in(a;b])$ ale acesteia nu se conțin puncte conjugate cu punctul inițial $(a;y^*(a))$.

Astfel extremala $y^*(x), x\in[a;b]$, satisface condiția tare a lui Jacobi dacă problema lui Cauchy (1.4.8) are doar soluție identic nulă. Se va considera că punctul conjugat este punctul curbei extremale pentru care se anulează soluția EJ ce satisface condițiile inițiale $\delta y(a)=0, \delta y'(a)=1$.

Teorema 1.4.3. (**Condiția necesară a lui Jacobi**) *Fie funcțiile* $A(x), B(x)$ *şi* $\delta y(x)$ *prezente în expresia analitică a funcționalei* $\delta^2 I[y^*;\delta y]$, *definită prin relația (1.4.4), satisfac condițiile:*

$$A,B\in C[a;b];\ B(x)>0,\ \forall x\in[a;b];\ \delta y\in H_1.$$

Dacă în PECV (1.4.3) funcția admisibilă $y^*(x)$ *realizează un minim (maxim) local al funcționalei* $I[y]$, *în ipoteza că funcția* $F(x,y,y')$ *are derivate parțiale de ordinul trei continue, atunci se satisface condiția lui Jacobi.*

Demonstrație. Fie funcția admisibilă $y^*(x)$ realizează un minim local al funcționalei $I[y]$. Conform teoremei 1.2.5 variația de ordinul doi $\delta^2 I[y^*;\delta y]$ este semipozitiv definită

$$\delta^2 I[y^*;\delta y]\geq 0,\ \forall \delta y\in H_1.$$

Urmează să arătăm că se satisface condiția lui Jacobi.

Se va construi o mulțime de funcționale pătratice $K_\mu[\delta y], \mu\in[0;1]$, astfel încât pentru $\mu=0$ să avem funcționala $\int_a^b (\delta y'(x))^2\,dx$ (uşor se verifică că printre punctele extremalei acestei funcționale nu avem puncte conjugate cu $(a;y_a)$), iar pentru $\mu=1$ - $\delta^2 I[y^*;\delta y]$. Se va arăta apoi că la variația continuă a parametrului μ de la 0 până la 1 inclusiv, curbele extremale $\delta y(x,\mu)$ nu conțin puncte conjugate cu punctul inițial pentru $x\in(a;b)$.

Întrucât funcționala $\delta^2 I[y^*,\delta y]$ este semipozitiv definită, evident că elementele familiei de funcționale pătratice [5, p.108], [8, p.238]

$$K_\mu[\delta y]:=\int_a^b\left(\left(A(x)(\delta y(x))^2+B(x)(\delta y'(x))^2\right)\mu+(\delta y'(x))^2(1-\mu)\right)dx,\ \mu\in[0;1], \tag{1.4.9}$$

sunt pozitiv definite pentru toți $\mu\in[0;1]$, cu excepția, poate că, a valorii $\mu=1$.

Fie $R:=(a;b)\times(0;1)$ şi $\bar{R}:=[a;b]\times[0;1]$. EJ asociată funcționalei $K_\mu[\delta y]$ este

$$\frac{d}{dx}\left((\mu B(x)+1-\mu)\delta y'(x)\right)-\mu A(x)\delta y(x)=0,\ \mu\in[0;1],\ x\in[a;b]. \tag{1.4.10}$$

Orice soluție $\delta y(x,\mu)$ a ecuației (1.4.10) este continuă în raport cu x şi μ. Deoarece $\mu B(x)+1-\mu>0$ pentru toți $\mu\in[0;1]$ şi acest coeficient împreună cu cel ce însoțește $\delta y(x)$

este neted în raport cu parametrul μ, putem afirma că $\delta y(x,\mu)$ are derivată continuă în raport cu μ pentru toți μ de pe un interval deschis ce conține segmentul $[0;1]$. Astfel $\delta y(x,\mu)\in C^1\left(\overline{R}\right)$. Vom exploata această continuitate pentru a arăta că absența punctului conjugat pentru $K_0[\delta y]$ implică acelaşi lucru şi pentru $K_\mu[\delta y]$ $(\mu\in(0;1))$, iar în particular, pentru $K_1[\delta y]$.

Fie Λ mulțimea soluțiilor netriviale $\delta y(x,\mu)$ ale ecuației (1.4.10) astfel încât $\delta y(a,\mu)=0$ pentru toți $\mu\in[0;1]$. Să admitem că curba extremală a funcționalei $K_1[\delta y]=\delta^2 I[y^*;\delta y]$ conține un punct conjugat $(\tilde{x};\delta y(\tilde{x}))$, $\tilde{x}\in(a;b)$ cu punctul $(a;\delta y(a))$. Atunci există $\delta y(x,\mu)\in\Lambda$ astfel încât $\delta y(\tilde{x},1)=0$. Întrucât $\delta y(x,\mu)\in C^1\left(\overline{R}\right)$, conform lemei 1.4.2 (aceasta fiind aplicată funcționalei $K_\mu[\delta y]$) avem $\delta y'_x(\tilde{x},1)\neq 0$. Atunci, conform teoremei funcției implicite (prescurtat TFI) [a se vedea anexa], există o unică funcție $x=x(\mu)$, definită pe o vecinătate V a punctului $(\tilde{x};1)$, astfel încât $x(1)=\tilde{x}$, $\delta y(x(\mu),\mu)=0$ şi $x(\mu)$ este de clasă C^1 pe V, iar

$$x'(\mu)=-\frac{\delta y'_\mu(x(\mu),\mu)}{\delta y'_x(x(\mu),\mu)}. \tag{1.4.11}$$

Punctele $(x(\mu);\mu)$ ale vecinătății V descriu parametric curba γ cu tangenta continuă, care nu este orizontală în nici un punct. Prin urmare, intersecția lui γ cu linia $\mu=1$ trebuie să fie transversală, adică $\gamma\cap R\neq\varnothing$. Deşi TFI asigură existența curbei γ doar în vecinătatea lui $(\tilde{x};1)$, simplu se stabileşte că γ nu poate să se întrerupă în R. Într-adevăr, dacă se admite că γ se întrerupe în careva punct $(c;d)\in R$, întrucât în acesta se îndeplinesc condițiile TFI, conchidem că există o unică prelungire netrivială a lui γ pe o vecinătate a lui $(c;d)$, ceea ce contrazice ipoteza că $(c;d)$ este un punct terminal pentru γ. Deci γ trebuie să continue până la frontiera lui $\overline{R}$ (soluția $\delta y(x,\mu)$ depinde continuu de parametrul μ).

Deoarece condițiile TFI sunt satisfăcute în fiecare punct al curbei γ, aceasta garantează că $x'(\mu)$ este continuă (deci ia valori finite), iar în baza relației (1.4.11) se deduce că orice prelungire a lui γ nu poate să includă un punct în care tangenta este orizontală (ar exista un μ^* încât $\delta y(x,\mu^*)=\delta y'_x(x,\mu^*)=0$). Astfel curba γ nu poate să conțină puncte de întoarcere şi să intersecteze segmentul $\mu=1,\ a\le x\le b$. Deoarece curba extremală a funcționalei $K_0[\delta y]$ nu conține puncte conjugate cu punctul inițial $(a;\delta y(a))$ $(\delta y(x,0)\neq 0,\ \forall x\in(a;b])$, curba γ nu poate să intersecteze nici segmentul $\mu=0,\ a\le x\le b$, cu excepția, poate că, a punctului $(a;0)$.

Să verificăm dacă γ intersectează dreptele $x=a$ sau $x=b$. Să admitem că γ intersectează segmentul $x=b,\ 0\le\mu\le 1$. Atunci există $\mu_1\in[0;1)$ astfel încât $\delta y(a,\mu_1)=\delta y(b,\mu_1)=0$. În completă analogie cu cele efectuate la demonstrația lemei 1.4.1 se poate arăta că $K_{\mu_1}[\delta y]=0$ pentru funcția evidențiată $\delta y(x,\mu)\in\Lambda$, iar aceasta contrazice faptul că $K_\mu[\delta y]$ este pozitiv definită pentru $\mu\in[0;1)$. Astfel curba γ nu intersectează dreapta $x=b$.

Prin construcție avem $\delta y(a,\mu)=0$ pentru toți $\mu\in[0;1]$ şi, prin urmare, funcția $x(\mu)=a$ este soluție a ecuației $\delta y(x,\mu)=0$ pentru toți $\mu\in[0;1]$. Condițiile TFI sunt satisfăcute în fiecare punct al acestei drepte şi, prin urmare, $x(\mu)=a$ este unica soluție ce intersectează această linie. Întrucât $\tilde{x}>a$, curba γ este distinctă de această dreaptă, şi deci nu poate să intersecteze dreapta $x=a$ (*nu poate să intersecteze segmentul* $x=a,\ 0\le\mu\le 1$*, deoarece atunci pentru careva* μ *am fi avut* $\delta y'_x(a,\mu)=0$*, în contradicție cu presupunerea făcută).*

Din cele spuse conchidem că curba γ cu proprietățile menționate nu poate să existe, iar atunci extremala $\delta y(x)$ a funcționalei $K_1[\delta y]$ nu poate să conțină puncte conjugate cu $(a;\delta y(a))$ pentru $x\in(a;b)$. ■

Condiția tare a lui Jacobi reprezintă o condiție necesară, dar nu şi suficientă de extrem local.

Exemplul 1.4.3. Să considerăm funcționala din exemplul 1.4.1. Extremala admisibilă $y^*(x)\equiv 0$ realizează un minim al lui $I[y]$. În acelaşi timp nu sunt puncte conjugate cu $O(0;0)$ ce aparțin curbei definite de această extremală, deci are loc condiția tare a lui Jacobi. ■

Exemplul 1.4.4. Să considerăm funcționala din exemplul 1.4.2. Mai sus s-a arătat că extremala admisibilă $y^*(x)\equiv 0$ nu realizează un extrem local al lui $I[y]$.

EJ $\delta y''(x)+\delta y(x)=0$ este o EDLO cu coeficienți constanți. Soluțiile ecuației caracteristice $\lambda^2+1=0$ sunt $\lambda_{1,2}=\pm i$, iar soluția generală a EDLO este $\delta y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$ $(c_1,c_2\in\mathbb{R})$. În baza condiției la extremitatea stângă $\delta y(0)=0$ avem $c_1=0$. Atunci soluția generală $\delta y(x)=c_2\sin x$ se anulează în punctul $x=\pi\in\left(0;5\pi/4\right]$. Prin urmare, punctul $O^*(\pi;0)$ este conjugat punctului $O(0;0)$ şi O^* aparține arcului $\widehat{OB}$ ($B(5\pi/4;0)$) al extremalei. Astfel nu se satisface condiția lui Jacobi. ■

Lema 1.4.3. *Fie funcțiile* $A(x),B(x)$ *şi* $\delta y(x)$*, prezente în expresia analitică a funcționalei* $\delta^2 I[y^*;\delta y]$*, definită de relația (1.4.4), satisfac condițiile:*

$$A,B\in C[a;b];\ B(x)>0,\ \forall x\in[a;b];\ \delta y\in H_1.$$

Pentru ca funcționala $\delta^2 I[y^*;\delta y]$ să fie pozitiv definită este necesar şi suficient ca curba extremală $y^*(x)$ să nu conțină puncte conjugate punctului inițial $(a;y_a)$ pentru $x\in(a;b]$.

Demonstrație. În completă analogie cu cele efectuate la demonstrația teoremei 1.4.3 se arată că dacă funcționala $\delta^2 I[y^*;\delta y]$ este pozitiv definită, atunci curba extremală $y^*(x)$ nu conține puncte conjugate punctului inițial $(a;y_a)$ pentru $x\in(a;b]$. În continuare se va arăta că are loc reciproca.

Fie curba extremală $y^*(x)$ nu conține puncte conjugate punctului inițial $(a;y_a)$ pentru $x\in(a;b]$. Pentru $\delta y\in H_1$ şi $w\in C^1[a;b]$ arbitrari avem $\int_a^b \frac{d}{dx}\left(w(x)\left(\delta y(x)\right)^2\right)dx = w(x)\left(\delta y(x)\right)^2\Big|_{x=a}^{x=b}=0$ sau $\int_a^b\left(w'(x)\left(\delta y(x)\right)^2+2\delta y(x)\delta y'(x)w(x)\right)dx=0$. Adăugând ultima integrală la $\delta^2 I[y^*;\delta y]$, se obține

$$\delta^2 I[y^*;\delta y]=\int_a^b\left(\left(A(x)+w'(x)\right)\left(\delta y(x)\right)^2+2\delta y(x)\delta y'(x)w(x)+B(x)\left(\delta y'(x)\right)^2\right)dx\,. \qquad (1.4.12)$$

Întrucât $B(x)>0$, în cazul în care există funcția $w\in C^1[a;b]$ ce satisface egalitatea $w(x)=\sqrt{A(x)+w'(x)}\cdot\sqrt{B(x)}$ (altfel spus, $w(x)$ este soluție a ecuației lui Riccati (prescurtat ER) $B(x)w'(x)-w^2(x)+B(x)A(x)=0$ pe $[a;b]$), relația (1.4.12) poate fi scrisă sub forma:

$$\delta^2 I[y^*;\delta y]=\int_a^b\left(\sqrt{A(x)+w'(x)}\cdot\delta y(x)+\sqrt{B(x)}\cdot\delta y'(x)\right)^2dx=\int_a^b B(x)\left(\delta y'(x)+\frac{w(x)}{B(x)}\delta y(x)\right)^2dx\,. \qquad (1.4.13)$$

Evident că $\delta^2 I[y^*;\delta y]\ge 0,\ \forall\delta y\in C^1[a;b]$. Se va arăta că $\delta^2 I[y^*;\delta y]>0$ pentru $\delta y(x)$ neidentic nulă. Dacă există $\delta y_0\in H_1$ astfel încât $\delta^2 I[y^*;\delta y_0]=0$, atunci funcționala $\delta^2 I[y^*;\delta y]$ atinge valoarea minimă globală pe $\delta y_0(x)$. De aceea $\delta y_0(x)$ satisface EJ (1.4.7). Întrucât $\delta^2 I[y^*;\delta y_0]=0$ şi are loc $B(x)>0$ pe $[a;b]$, ținând cont de relația (1.4.13), se obține $\delta y_0'(x)+\frac{w(x)}{B(x)}\delta y_0(x)=0,\ \forall x\in[a;b]$, de unde găsim $\delta y_0(a)=\delta y_0'(a)=0$ ($\delta y_0\in C^1[a;b]$). Conform lemei 1.4.2 $\delta y_0(x)\equiv 0$ pe $[a;b]$. Aşadar, funcționala $\delta^2 I[y^*;\delta y]$ este pozitiv definită.

Rămâne să se arate că atunci când curba extremală $y^*(x)$ nu conține puncte conjugate punctului inițial $(a;y_a)$ pentru $x\in(a;b]$, există pe $[a;b]$ soluție a ER (EDN de ordinul I). În acest scop se efectuează în ER substituția $w(x)=-u'(x)B(x)/u(x)$, unde $u(x)$ este o funcție necunoscută [9]. Atunci $w'(x)=\left(u'^2(x)B(x)/u^2(x)\right)-\left(\frac{d}{dx}\left(u'(x)B(x)\right)\right)\Big/u(x)$ şi substituind expresiile pentru $w(x)$ şi $w'(x)$ în ER, după simplificări se obține EDLO de ordinul II

$$A(x)u(x)-\frac{d}{dx}\big(B(x)u'(x)\big)=0\,. \tag{1.4.14}$$

Dacă se va arăta că ecuația (1.4.14) are soluția $u^*(x)\neq 0,\ \forall x\in[a;b]$, atunci, în virtutea substituției efectuate, funcția $w(x)$ (soluția ER) va fi determinată. Întrucât coeficienții $A,B\in C^1[a;b]$ (în virtutea condițiilor impuse asupra lui F şi y), iar $B(x)>0,\ \forall x\in[a;b]$, rezultă că problema este nesingulară (în particular, coeficientul superior nu se anulează pe $[a;b]$) şi, conform teoremei lui Picard de existență şi unicitate a soluției problemei lui Cauchy, având în vedere valorile inițiale $u(a)=u_0$ şi $u'(a)=u_0'$, există o soluție unică $u_1(x,u_0,u_0')$ a problemei lui Cauchy pentru EJ (1.4.14) ($u_1(x)$ satisface $u_1(a)=0$ şi $u_1'(a)=1$). Atunci, ținând cont că se satisface condiția tare a lui Jacobi, avem $u_1(x)>0,\ \forall x\in(a;b]$.

Există o soluție unică $u^*(x)$ pe $[a;b]$ a ecuației (1.4.14) cu condiția inițială $u^*(a)=\varepsilon,\ u^{*\prime}(a)=1$, unde $\varepsilon>0$ este un număr suficient de mic. Această soluție depinde continuu de ε. Deoarece $u_1(x)>0$, $\forall x\in(a;b]$, rezultă că $u^*(x)>0,\ \forall x\in[a;b]$. ■

Dar atunci soluția ecuației lui Ricatti, ce iese din punctul $A(a,w(a))$ poate fi prelungită pe întreg semintervalul $(a;b]$, cu condiția că este posibilă substituția $w(x)=-u'(x)B(x)/u(x)$. Ultima este posibilă dacă pentru orice $x\in(a;b]$ avem $u(x)\neq 0$, deoarece $B(x)\neq 0$ şi $u'(x)\neq 0$ pe $(a;b]$. (În cazul în care $u(x_0)=u'(x_0)=0,\ x_0\in(a;b]$, vom avea $u(x)\equiv 0$ pe $(a;b]$, ca soluție a problemei lui Cauchy pentru ecuația lui Jacobi cu date inițiale nule, iar substituția nu este posibilă). ■

Prin urmare, pentru a verifica dacă funcționala pătratică $\delta^2 I[y^*;\delta y]$ este pozitiv definită, este necesar să se stabilească dacă această problemă are soluții netriviale. Lipsa soluțiilor netriviale (cu condiția că se îndeplinesc celelalte condiții ale lemei 1.4.3) semnifică că funcționala pătratică este pozitiv definită.

III. Câmpul central de extremale ale funcţionalei

Fie $D\subset\mathbb{R}^2$ un domeniu simplu conex.

Definiția 1.4.6. O familie de arce de curbe $y:D_x\subset\mathbb{R}\to y(x,c)\in\mathbb{R}$, unde $D_x:=\{x\in\mathbb{R}\,|\,(x;y)\in D\}$ şi $c\in\mathbb{R}$ este o constantă arbitrară, se numeşte câmp dacă extremitățile arcelor din această familie aparțin frontierei lui D şi dacă prin fiecare punct din D trece un arc al familiei şi numai unul. În cazul în care curbele $y=y(x,c)$ sunt extremale, acest câmp se numeşte câmp de extremale.

De exemplu, în interiorul cercului $x^2+y^2=1$ dreptele paralele $y=x+c$ formează un

câmp (fig. 1.4.1). Dreptele în acest câmp au panta $p(x,y)=1$.

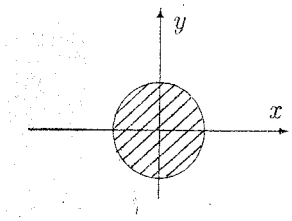

fig. 1.4.1

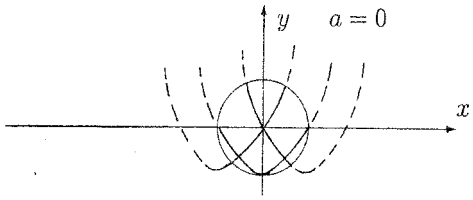

fig. 1.4.2

În schimb, familia de parabole $y=(x-a)^2-1$ (fig. 1.4.2) în interiorul aceluiaşi cerc nu formează câmp deoarece parabolele acestei familii se intersectează în interiorul cercului.

Definiția 1.4.7. Dacă toate curbele unui fascicul de curbe acoperă domeniul D şi nu se intersectează în acest domeniu, cu excepția centrului fasciculului, spunem că acest fascicul $y=y(x,c)$ formează un câmp central pe D (fig. 1.4.3).

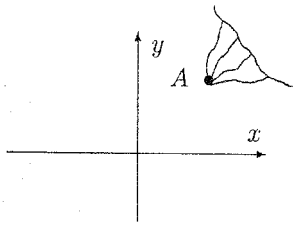

fig. 1.4.3

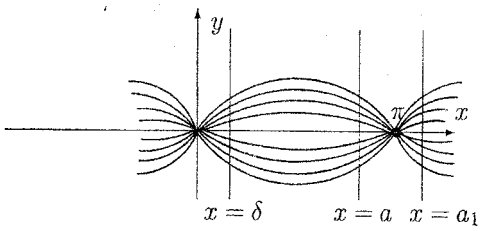

fig. 1.4.4

De exemplu, fasciculul de sinusoide $y=c\sin x$ pentru $0\le x\le a,\ a<\pi$ formează un câmp central (fig. 1.4.4). Acelaşi fascicul formează un câmp pe segmentul $x\in[\delta;a]$, unde $\delta>0$ şi $a<\pi$ (fig. 1.4.4). La fel, acest fascicul nu formează un câmp pentru $0\le x\le a_1,\ a_1>\pi$ (fig. 1.4.4).

Fie curba $y=y^*(x),\ x\in[a;b]\subset D_x$ o extremală admisibilă a PECV (1.4.3), iar $A(a;y_a),\ B(b;y_b)$ - coordonatele extremităților curbei menționate. Se ştie că extremalele, fiind soluții ale unei ecuații diferențiale de ordinul doi (EEL), depind de două constante arbitrare c_1,c_2. Extremalele ce trec prin punctul $A(a;y_a)$ formează un fascicul de extremale $y=y(x,c_1)$ (din condiția de trecere prin punctul A se elimină una dintre constante).

Definiția 1.4.8. Extremala $y=y^*(x)$ este inclusă într-un câmp de extremale, dacă există o familie de extremale $y=y(x,c)$ ce formează un câmp de extremale (central sau nu), ce conține extremala $y=y^*(x)$ pentru o anume valoare c^* a lui c şi această extremală nu se află pe frontiera domeniului D (fig. 1.4.5 şi fig. 1.4.6).

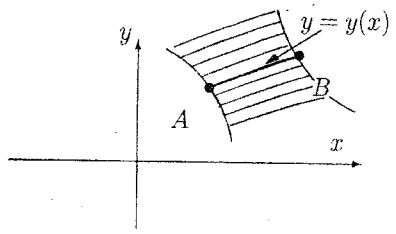

fig. 1.4.5

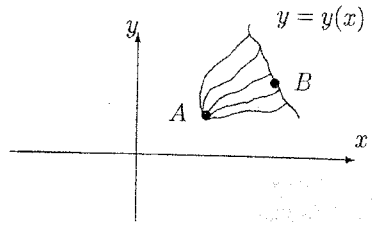

fig. 1.4.6

Dacă în vecinătatea unei extremale, curbele din fasciculul $y = y(x, c_1)$ nu se intersectează (cu excepția punctului $A(a; y_a)$), atunci specificarea lui b şi y_b determină unic extremala din fascicul (parametrul c se determină în mod univoc din ecuația $y(b, c_1) = y_b$ pentru orice punct $(b; y_b) \in D$).

Exemplul 1.4.5. *Pentru care valori ale parametrului* $b \in \mathbb{R}$ *extremalele funcționalei* $I[y] = \int_0^b \left(4y^2(x) - y'^2(x)\right)dx$ *formează un câmp central (cu centrul în punctul* $(0;0)$ *) în domeniul* $D := \{(x; y) : 0 \le x \le b, \forall y \in \mathbb{R}\}$.

Extremalele funcționalei $I[y]$ sunt funcții de forma $y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$. Din condiția $y(0) = 0$, ce defineşte centrul câmpului de extremale, aflăm $y(x) = c_1 \sin 2x$. Evident, fiind date x şi y, această egalitate defineşte în mod univoc parametrul $c_1 = y/\sin 2x$ numai dacă $0 < x \le b < \pi/2$. Dacă însă $b \ge \pi/2$, atunci, de exemplu, pentru punctul $(\pi/2; 0)$ constanta c_1 nu este definită în mod univoc. Prin urmare, familia $y(x) = c_1 \sin 2x$ formează un câmp central de extremale ale funcționalei $I[y]$ pentru valori $0 < b < \pi/2$, iar pentru $b \ge \pi/2$ aceasta nu formează un câmp de extremale. ■

Pe lângă familia de funcții $y = y(x, c)$ ce defineşte câmpul central de extremale ale funcționalei, se va utiliza şi familia $p = y'(x, c)$, ce defineşte înclinarea câmpului central de extremale. Întrucât într-un câmp central de extremale prin fiecare punct (cu excepția centrului) trece o singură extremală, înclinarea câmpului în punctele date reprezintă o funcție $p = p(x, y)$ de aceste puncte.

Definiția 1.4.9. Curba definită de ecuațiile $F(x, y, c) = 0, \dfrac{\partial F}{\partial c}(x, y, c) = 0$ se numeşte curbă c-discriminantă a familiei de curbe dată de ecuația $F(x, y, c) = 0$.

Curba c- discriminantă include înfăşurătoarea familiei şi punctele multiple ale curbelor din familie. Dacă $F(x, y, c) = 0$ este ecuația unui fascicul de curbe, atunci centrul fasciculului aparține de asemenea curbei c- discriminante. Două curbe infinit apropiate ale unei familii $F(x, y, c) = 0$ se intersectează în puncte apropiate de curba c-discriminantă. Prin urmare, dacă avem un fascicul de extremale $y = y(x, c)$ trecând prin punctul $A(a; y_a)$ şi determinăm curba sa discriminantă $\Phi(x, y) = 0$, atunci curbele

apropiate ale familiei $y = y(x,c)$ se vor intersecta lângă curba $\Phi(x,y) = 0$. În particular, curbele din această familie care sunt apropiate de extremala $y = y^*(x)$ ce trece prin punctele $A(a;y_a)$ şi $B(b;y_b)$ se vor intersecta în vecinătatea punctelor de tangenţă (sau de intersecţie) ale curbei $y = y^*(x)$ cu curba c- discriminantă (fig. 1.4.7). Astfel dacă arcul $\overset{\frown}{AB}$ al extremalei $y = y^*(x)$ conţine un punct A^* (diferit de A) de tangenţă cu curba c- discriminantă a fasciculului de extremale $y = y(x,c)$, atunci curbele fasciculului apropiate de $y = y^*(x)$ se pot intersecta între ele însăşi şi cu curba $y = y^*(x)$ lângă punctul A^*, adică ele nu formează un câmp.

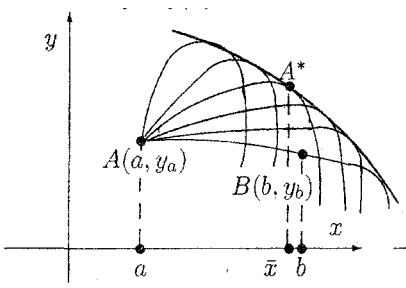

fig. 1.4.7

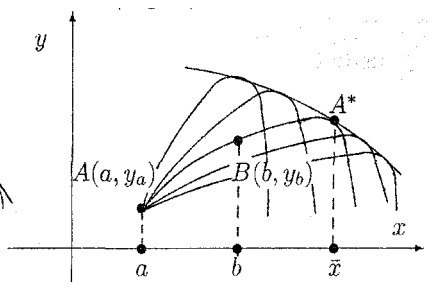

fig. 1.4.8

Lema 1.4.4. *Fie pentru extremala $y^*(x), x \in [a;b]$, a funcţionalei $I[y]$ se satisface condiţia tare a lui Legendre. Punctul $A^*(\tilde{x};y^*(\tilde{x}))$ $(\tilde{x} \in (a;b])$ al arcului $\overset{\frown}{AB}$ $(A(a;y^*(a)), B(b;y^*(b)))$ al extremalei $y^*(x)$ este punct de tangenţă cu curba c- discriminantă a fasciculului de extremale $y = y(x,c)$ dacă şi numai dacă A^* este punct conjugat lui A.*

Demonstraţie. Fie arcul $\overset{\frown}{AB}$ al extremalei $y^*(x)$ conţine un punct $A^*(\tilde{x};y^*(\tilde{x}))$ $(\tilde{x} \in (a;b])$ de tangenţă cu curba c- discriminantă a fasciculului de extremale $y = y(x,c)$. Să arătăm că A^* este punct conjugat lui A.

Curba c- discriminantă pentru familia $y = y(x,c)$ este dată de ecuaţiile $y = y(x,c), y'_c(x,c) = 0$. Pentru fiecare curbă din familia de extremale (c- fixat), derivata $y'_c(x,c)$ este o funcţie numai de x. Notăm această funcţie prin $u := y'_c(x,c)$, iar atunci $u' = y''_{xc}(x,c)$. Funcţiile $y = y(x,c)$, fiind extremale, sunt soluţii ale EEL. Prin urmare, are loc identitatea

$$F_y(x, y(x,c), y'_x(x,c)) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y(x,c), y'_x(x,c)) \equiv 0 .$$

Derivând această identitate în raport cu c şi efectuând substituţia $y'_c(x,c) = u$, se obţine $F_{yy}u + F_{yy'}u' - \frac{d}{dx}\left(F_{yy'}u + F_{y'y'}u'\right) = 0$, sau

$$\left(F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'}\right)u - \frac{d}{dx}\left(F_{y'y'}u'\right) = 0 . \qquad (1.4.15)$$

În ultima relație $F_{yy}(x,y,y')$, $F_{yy'}(x,y,y'), F_{y'y'}(x,y,y')$ sunt funcții de x, deoarece al doilea argument $y=y(x,c)$ este o soluție a EEL, considerată pentru valoarea $c=c^*$ ce corespunde extremalei $\widehat{AB}$. Prin urmare, ecuația (1.4.15) este EJ. Întrucât soluția $u=y'_c(x,c^*)$ a EJ se anulează în centrul fasciculului de extremale pentru $x=a$ (centrul fasciculului aparține curbei c - discriminante), dar şi în punctul $\tilde{x}$ (ce aparține arcului $\widehat{AB}$ al extremalei) al intervalului $(a;b]$, definit prin ecuațiile $y=y(\tilde{x},c^*)$, $y'_c(\tilde{x},c^*)=u(\tilde{x},c^*)=0$ (cu toate acestea nu este identic nulă pe $[a;\tilde{x}]$), atunci punctul A^* este conjugat lui A.

Să demonstrăm reciproca afirmației. Fie curba extremală $y^*(x)=y(x,c^*)$ cu punctul inițial $A(a;y_a)$ are un punct $A^*(x(c^*);y(x(c^*),c^*))$ conjugat lui A. Atunci EJ are o soluție $\delta y(x,c^*)$ ce satisface $\delta y(a,c^*)= \ =\delta y(x(c^*),c^*)=0$. Din cele menționate mai sus se știe că şi funcția $y'_c(x,c^*)$ este soluție a EJ ce satisface $y'_c(a,c^*)=0$. Să notăm $\delta y(x):=\delta y(x,c^*)$, $\xi(x):=y'_c(x,c^*)$. Atunci, ținând cont că $\xi(x)$ şi $\delta y(x)$ sunt soluții ale EJ, avem

$$\begin{aligned} &A(x)\xi(x)-\frac{d}{dx}\big(B(x)\xi'(x)\big)=0,\ x\in[a;b],\\ &A(x)\delta y(x)-\frac{d}{dx}\big(B(x)\delta y'(x)\big)=0,\ x\in[a;b]. \end{aligned} \tag{1.4.16}$$

Înmulțind prima ecuație din relația (1.4.16) cu $\delta y(x)$, iar a doua cu $\xi(x)$, apoi scăzând ecuațiile obținute, se obține

$$\xi(x)\big(B'(x)\delta y'(x)+B(x)\delta y''(x)\big)-\delta y(x)\big(B'(x)\xi'(x)+B(x)\xi''(x)\big)=0,\ x\in[a;b]. \tag{1.4.17}$$

Să introducem determinantul lui Wronski

$$W(x):=\begin{vmatrix}\xi(x) & \delta y(x)\\ \xi'(x) & \delta y'(x)\end{vmatrix}=\xi(x)\delta y'(x)-\xi'(x)\delta y(x).$$

Avem $W'(x):=\xi'(x)\delta y'(x)+\xi(x)\delta y''(x)-\xi''(x)\delta y(x)-\xi'(x)\delta y'(x)=\xi(x)\delta y''(x)-\xi''(x)\delta y(x)$, iar atunci relația (1.4.17) se poate reprezenta sub forma $B'(x)W(x)+B(x)W'(x)=0$, adică $\frac{d}{dx}\big(B(x)W(x)\big)=0$. Să integrăm în limitele de la a la $t=x(c^*)$ $(t\in(a;b])$ ambii membri ai ultimei ecuații obținute. Atunci avem $\big(B(x)W(x)\big)\Big|_{x=a}^{x=t}=0$, de unde rezultă egalitatea $B(t)W(t)=B(a)W(a)$. Ultima relație se va scrie sub forma explicită $B(t)\big(\xi(t)\delta y'(t)-\xi'(t)\delta y(t)\big)=B(a)\big(\xi(a)\delta y'(a)-\xi'(a)\delta y(a)\big)$, iar condițiile la extremități $\xi(a)=\delta y(a)=\delta y(t)=0$ implică $B(t)\xi(t)\delta y'(t)=0$. Întrucât $B(t)\neq 0$ $(t\in[a;b])$ şi $\delta y'(t)\neq 0$ (deoarece în caz contrar, conform lemei 1.4.2 avem $\delta y(x)\equiv 0$), rezultă că $\xi(t)=0$, adică $y'_c(x(c^*),c^*)=0$.

Dacă $y''_{xc}(x(c),c)\neq 0$, atunci, în virtutea teoremei funcției implicite, ecuația $y'_c(x,c)=0$

are soluție în raport cu x (aceasta se ştie deja), iar $x(c)$ este de clasă C^1 în raport cu c. Să considerăm curba netedă, definită parametric $x = x(c),\ y = y(x(c),c)$. Panta tangentei la această curbă, ținând cont că $y'_c(x(c^*),c^*) = 0$, va fi

$$\frac{dy/dc}{dx/dc} = \frac{y'_x x'_c + y'_c}{x'_c} = y'_x .$$

Ea coincide cu panta tangentei la extremala familiei în acelaşi punct, de unde rezultă că curba construită este înfăşurătoare a familiei de extremale. ■

În continuare la verificarea condițiilor suficiente de extrem se va stabili dacă extremala dată aparține unui câmp central de extremale ale funcționalei cercetate. Aceasta se poate realiza nemijlocit aflând câmpul central de extremale $y = y(x,c)$ şi verificând dacă extremala $y^*(x)$ aparține familiei $y = y(x,c)$. Cu toate acestea, deseori este mai comod de a utiliza pentru o astfel de verificare o condiție specială. În acest sens are loc următorul rezultat:

Lema 1.4.5. *Dacă pentru extremala $y = y^*(x)$ $(x \in [a;b])$ a funcționalei $I[y]$ se satisface condiția tare a lui Jacobi, atunci $y^*(x)$ poate fi inclusă într-un câmp central de extremale centrat la punctul $(a; y_a)$.*

Demonstrație. Dacă există o soluție a EJ ce se anulează pentru $x = a$ şi care nu se anulează pe intervalul $(a;b]$, atunci nu există punct conjugat lui A (în sensul definiției geometrice) pe arcul $\overset{\frown}{AB}$. Deoarece arcul $\overset{\frown}{AB}$ al extremalei $y = y^*(x)$ nu are puncte comune (distincte de A) cu curba c- discriminantă a fasciculului de extremale ce include extremala dată, extremalele din fascicul suficient de apropiate de arcul $\overset{\frown}{AB}$ nu îl intersectează, adică ele formează în vecinătatea arcului $\overset{\frown}{AB}$, un câmp central de extremale cu centrul în $A(a; y_a)$ ce conține acest arc. ■

Exemplul 1.4.6. *Să se verifice apartenența extremalei admisibile $y^*(x) = sh(2x)/sh2$ câmpului central de extremale ale funcționalei $I[y] = \int_0^b \left(y'^2(x) + 4y^2(x) + 4x^2\right)dx,\ y(0) = 0$, $y(1) = 1\ (b > 0)$.*

Se poate determina nemijlocit câmpul central $y(x) = Csh(2x)$ de extremale ale funcționalei $I[y]$ ce conține pe $y^*(x)$. Însă utilizarea condiției lui Jacobi permite verificarea apartenenței extremalei câmpului central, fără a afla pe acesta. Într-adevăr, în acest exemplu EJ are forma $\delta y''(x) - 4\delta y(x) = 0$, iar soluțiile acesteia ce verifică condiția $\delta y(0) = 0$ sunt $\delta y(x) = c_1 sh(2x)$. Există soluție a EJ (de exemplu, $\delta y(x) = sh(2x)$) care nu are zerouri pe intervalul $(0;b]$ pentru orice $b > 0$. ■

IV. Condiţia necesară a lui Weierstrass

Să admitem că pentru extremala admisibilă $y = y^*(x)$ (care trece prin punctele $A(a;y_a), B(b;y_b)$) a funcționalei $I[y]$ din PECV (1.4.3) se îndeplineşte condiția tare a lui Jacobi. Astfel $y = y^*(x)$ poate fi inclusă într-un câmp central de extremale (fig. 9), definit pe domeniul D, a cărui pantă este $p(x,y) = y'_x(x,c)$ (unde c este înlocuit din ecuația $y = y(x,c)$).

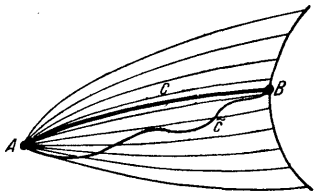

fig. 1.4.8

Definiția 1.4.10. Funcția $\varepsilon(x,y,y',p) := F(x,y,p) - F(x,y,y') - (p - y')F'_{y'}(x,y,y')$ este numită funcția lui Weierstrass (prescurtat FW).

Funcția $\varepsilon(x,y,y',p)$ este definită pe curbe $y \in C^1[a;b],\ y(a) = y_a, y(b) = y_b$; prin $y'(x)$ se înțelege derivata lui $y(x)$ în punctul $M(x;y)$, iar prin $p = p(x,y)$ - înclinarea câmpului de extremale în acest punct.

Dacă se consideră x şi y ca fiind parametri, iar $Y = F(x,y,y')$ - funcție de argument y', atunci din punct de vedere geometric FW $\varepsilon(x,y,y',p)$ reprezintă diferența ordonatelor (abaterea pe verticală) curbei Γ, definită de graficul funcției Y în planul $y'OY$, şi a tangentei la Γ, dusă în punctul de abscisă $y' = p$. Faptul că FW păstrează semnul pentru unele valori ale lui y' înseamnă că curba Γ menționată stă de o parte a tangentei pentru valorile indicate y', iar în acest caz avem un extrem local slab. Dacă însă, curba Γ stă de o parte a tangentei pentru toți y' şi pentru valori ale parametrilor x şi y, apropiate de punctele extremalei, atunci avem un extrem local tare.

FW reprezintă un instrument eficient de cercetare a funcțiilor concrete la extrem al funcționalei. Fie $y(x) := y^*(x) + \delta y(x)$ o funcție admisibilă. Integrala $\int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$ ce defineşte valoarea funcționalei $I[y]$ pentru argumentul $y(x)$, poate fi interpretată ca o integrală curbilinie $\int_{\Gamma(y)} F(x,y,y')dx$, calculată de-a lungul curbei $\Gamma(y)$, definită parametric prin relațiile $x = t,\ y = y(t),\ y' = y'(t)$. Creşterea funcționalei $\Delta I := I[y] - I[y^*]$ se poate reprezenta ca o diferență de integrale curbilinii ce corespund funcțiilor $y(x) = y^*(x) + \delta y(x)$ şi $y^*(x)$.

Teorema 1.4.4. (Condiţia necesară a lui Weierstrass [10, p.74]) *Dacă în PECV (1.4.3) funcția admisibilă $y^*(x)$ realizează un minim (maxim) local tare al funcționalei $I[y]$, în ipoteza că funcția F are derivate parțiale de ordinul doi continue, atunci FW verifică*

condiția

$$\varepsilon(x, y^*, y^{*\prime}, p) \geq 0 \ (\leq 0), \forall x \in [a;b], \forall p \in \mathbb{R} . \tag{1.4.18}$$

Demonstrație. Să admitem că în ipotezele teoremei relația (1.4.18) nu se satisface. Atunci există punctul $\xi \in [a;b]$ şi $q \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\varepsilon(\xi, y^*(\xi), y^{*\prime}(\xi), q) < 0 , \tag{1.4.19}$$

unde $y = y^*(x)$ este ecuația extremalei $\Gamma(y^*)$. În continuare se va indica o curbă admisibilă $\Gamma(y)$, apropiată de curba $\Gamma(y^*)$ în norma spațiului $C[a;b]$, astfel încât să aibă loc inegalitatea

$$\Delta I = \int_{\Gamma(y)} F(x, y, y')dx - \int_{\Gamma(y^*)} F(x, y, y')dx < 0 , \tag{1.4.20}$$

ceea ce va contrazice ipoteza că curba extremală $\Gamma(y^*)$ realizează un minim local tare al funcționalei $I[y]$.

În virtutea continuității FW, se poate aranja ca punctul considerat ξ să aparțină interiorului lui $[a;b]$. Să alege $h > 0$ astfel încât $\xi - h > a$ şi se consideră funcția (fig. 1.4.9)

$$y = y_h(x) = \begin{cases} y^*(x) + (x-a)r & pentru \ \ a \leq x \leq \xi - h, \\ (x-\xi)q + y^*(\xi) & pentru \ \ \xi - h \leq x \leq \xi, \\ y^*(x) & pentru \ \ \xi \leq x \leq b, \end{cases}$$

unde r este numărul definit de condiția

$$y^*(\xi - h) + (\xi - a - h)r = -qh + y^*(\xi) , \tag{1.4.21}$$

şi, prin urmare, depinde de h.

Funcția $y_h(x)$ satisface condițiile $y_h \in C[a;b], \ y_0(x) \equiv y^*(x)$.

Fie $\Delta I(h) := I[y_h] - I[y^*]$. Deoarece

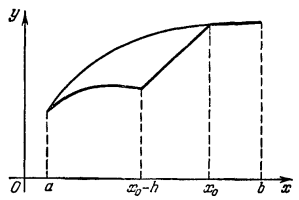

fig. 1.4.9

$$\Delta I(h) = \int_a^{\xi-h} F(x, y^*(x) + (x-a)r, y^{*\prime}(x) + r)dx + \int_{\xi-h}^{\xi} F(x, y^*(\xi) + (x-\xi)q, q)dx - \int_a^{\xi} F(x, y^*(x), y^{*\prime}(x))dx ,$$

ținând cont de relația (1.4.21) avem

$$(\Delta I)'(h) = -F(\xi - h, y^*(\xi) - qh, y^{*\prime}(\xi - h) + r) + \int_a^{\xi-h} \Big\{ F'_y(x, y^*(x) + (x-a)r, y^{*\prime}(x) + r) \cdot (x-a)\frac{dr}{dh} +$$
$$+ F'_{y'}(x, y^*(x) + (x-a)r, y^{*\prime}(x) + r) \cdot \frac{dr}{dh} \Big\} dx + F(\xi - h, y^*(\xi) - qh, q) .$$

Deoarece pentru $h = 0$ avem $r = 0$, se obține

$$(\Delta I)'(0) = -F(\xi, y^*(\xi), y^{*\prime}(\xi)) + F(\xi, y^*(\xi), q) +$$
$$+ \left.\frac{dr}{dh}\right|_{h=0} \cdot \int_a^{\xi} \Big\{ F'_y(x, y^*(x), y^{*\prime}(x)) \cdot (x-a) + F'_{y'}(x, y^*(x), y^{*\prime}(x)) \Big\} dx. \tag{1.4.22}$$

Întrucât $y^*(x)$ este extremală, are loc relația $F'_y(x,y^*(x),y^{*\prime}(x))=\frac{d}{dx}\left(F'_{y'}(x,y^*(x),y^{*\prime}(x))\right)$, iar atunci avem

$$\int_a^{\xi}\left\{F'_y(x,y^*(x),y^{*\prime}(x))\cdot(x-a)+F'_{y'}(x,y^*(x),y^{*\prime}(x))\right\}dx=$$

$$=\int_a^{\xi}\left\{(x-a)\frac{d}{dx}\left(F'_{y'}(x,y^*(x),y^{*\prime}(x))\right)+F'_{y'}(x,y^*(x),y^{*\prime}(x))\right\}dx=$$

$$=(x-a)F'_{y'}(x,y^*(x),y^{*\prime}(x))\Big|_{x=a}^{x=\xi}=(\xi-a)F'_{y'}(\xi,y^*(\xi),y^{*\prime}(\xi)). \qquad (1.4.23)$$

Derivând în raport cu h ambii membri ai relației (1.4.21) avem

$$-y^{*\prime}(\xi-h)+\frac{dr}{dh}\cdot(\xi-a-h)-r=-q,$$

iar pentru $h=0$ se obține

$$\left.\frac{dr}{dh}\right|_{h=0}\cdot(\xi-a)=-q+y^{*\prime}(\xi).$$

Astfel în baza relațiilor (1.4.22), (1.4.23) şi (1.4.19) se obține

$$(\Delta I)'(0)=F(\xi,y^*(\xi),q)-F(\xi,y^*(\xi),y^{*\prime}(\xi))-(q-y^{*\prime}(\xi))F'_{y'}(\xi,y^*(\xi),y^{*\prime}(\xi))=\varepsilon(\xi,y^*(\xi),y^{*\prime}(\xi),q)<0.$$

Relația $\Delta I(h)=\Delta I(0)+h(\Delta I)'(0)+o(h)$ $(h>0)$, împreună cu $\Delta I(0)=0$, implică $I[y_h]-I[y^*]<0$ pentru valori ale lui h suficient de mici. ■

Inegalitatea (1.4.18) reprezintă o condiție necesară, dar nu şi suficientă de extrem local.

Exemplul 1.4.7. *Să se arate că extremala admisibilă $y^*(x)=x$ nu realizează un extrem local al funcționalei* $I[y]=\int_0^1 y'^3(x)dx,\ \ y\in D:=\left\{y\in C^1[0;1]\,\middle|\,y(0)=0,\ y(1)=1\right\}$.

Funcția lui Weierstrass ia forma:

$$\varepsilon(x,y^*,y^{*\prime},p)=\left(y^{*\prime}(x)\right)^3-p^3-3p^2(y^{*\prime}(x)-p)=(y^{*\prime}(x)-p)^2(y^{*\prime}(x)+2p)=(p-1)^2(2p+1).$$

Evident că $\varepsilon(x,y^*,y^{*\prime},p)$ nu păstrează semn constant pentru orice $x\in[0;1]$ şi $p\in\mathbb{R}$. Prin urmare, extremala dată nu realizează un extrem local al lui $I[y]$. ■

V. Condiţii suficiente de extrem local slab sau tare pentru PECV

Vom aminti că EEL reprezintă atât condiția necesară de extrem local slab, cât şi condiția necesară de extrem local tare al funcționalei în PECV. Însă condițiile suficiente pentru extremul local slab şi cel tare sunt distincte.

Teorema 1.4.5. **(Condiţii suficiente de minim local slab) [3, p.336; 4, p.25]**

Fie integrandul $F(x,y(x),y'(x))$ al funcționalei $I[y(x)]$ din PECV (1.4.3) funcție de clasă C^3. Funcția $y^*\in C^1[a;b]$ realizează un minim local slab al funcționalei $I[y]$, dacă simultan se

îndeplinesc următoarele condiții:

1) *Funcția* $y^*(x)$ *este extremală admisibilă a funcționalei* $I[y]$*:* $y^*(x)$ *este soluție a EEL ce satisface condițiile la extremități;*
2) *Pentru funcția* $y^*(x)$ *se satisface condiția tare Legendre:* $B(x)>0,\ \forall x\in[a;b]$*;*
3) *Pentru funcția* $y^*(x)$ *se satisface condiția tare Jacobi: curba extremală nu conține puncte conjugate punctului inițial* $(a;y_a)$ *pentru* $x\in(a;b]$.

Demonstrație. Întrucât se îndeplinesc condițiile 1)-3) ale teoremei, conform lemei 1.4.3 funcționala $\delta^2 I[y^*;\delta y]$ este pozitiv definită. Dacă $\min\delta^2 I[y^*;\delta y]=c>0$ pentru $\delta y\in H_1$ neidentic nulă, atunci pentru orice $\delta y(x)$ ce satisface condiția $\|\delta y\|<1$ avem $\delta^2 I[y^*;\delta y]\geq c\|\delta y\|^2$, unde $c>0$. Deci funcționala $\delta^2 I[y^*;\delta y]$ este tare pozitiv definită. Atunci conform teoremei 1.4.1, funcția $y^*\in C^1[a;b]$ realizează un minim local slab al funcționalei $I[y]$. ■

Exemplul 1.4.8. *Să se cerceteze la extrem local slab extremala admisibilă* $y^*(x)\equiv 0$ *a funcționalei*

$$I[y]=\int_0^1\left(y'^2(x)-y(x)y'^3(x)\right)dx,\quad y\in D:=\left\{y\in C^1[0;1]\,\middle|\,y(0)=y(1)=0\right\}.$$

Soluțiile EJ $\delta y''(x)=0$ ce satisfac condiția la extremitatea stângă $\delta y(0)=0$ sunt $\delta y(x)=cx\ (c\in\mathbb{R})$. Pentru acestea din urmă avem $\delta y(x)\neq 0,\ \forall x\in(0;1]$, deci se satisface condiția tare Jacobi. Se satisface şi condiția tare Legendre întrucât

$$B(x)=F_{y'y'}(x,y^*(x),y^{*\prime}(x))=(2-6y(x)y'(x))\big|_{y=y^*}=2>0\,.$$

Prin urmare, extremala admisibilă $y^*(x)\equiv 0$ realizează un minim local slab al funcționalei $I[y]$. ■

Remarca 1.4.2.

a) Afirmația teoremei 1.4.5 rămâne adevărată dacă condiția tare Legendre se va înlocui cu condiția lui Weierstrass: funcția Weierstrass $\varepsilon(x,y,y',p)\geq 0$ pentru puncte $(x,y(x))$ din vecinătatea punctelor definite de extremala $y^*(x),\ x\in[a;b]$, dar şi pentru valori $y'(x)$ apropiate de p.

b) Dacă condiția tare Legendre are loc sub forma $F_{y'y'}\left(x,y^*(x),y'^*(x)\right)<0,\ \forall x\in[a;b]$, sau dacă în condiția lui Weierstrass avem $\varepsilon(x,y,y',p)\leq 0$, atunci condițiile formulate în teorema 1.4.5 sunt condiții suficiente de maxim local slab.

c) Condiția lui Jacobi reprezintă o condiție necesară de extrem local slab, adică dacă soluția EJ se anulează pentru careva valoare $x\in(a;b]$, atunci extremala $y^*(x)$ nu realizează un extrem local slab.

d) Condiția tare Weierstrass reprezintă o condiție necesară de extrem local slab, adică dacă funcția lui Weierstrass în punctele curbei definite de extremala $y^*(x)$, pentru $y'(x)$ oricât de apropiați de p are semne contrare, atunci extremala $y^*(x)$ nu realizează un extrem local slab.

În continuare se vor stabili condiții suficiente de extrem local tare în PECV. Mai întâi se va determina semnul creşterii ΔI când se trece de la curba extremală $\Gamma(y^*)$ la o curbă $\Gamma(y)$, adică semnul diferenței

$$\Delta I = \int_{\Gamma(y)} F(x, y(x), y'(x))dx - \int_{\Gamma(y^*)} F(x, y(x), y'(x))dx .$$

Să considerăm funcționala

$$\begin{aligned} G[y] &:= \int_{\Gamma(y)} \Big(F(x, y, p(x, y)) + (y'(x) - p(x, y))F_p(x, y, p(x, y))\Big)dx = \\ &= \int_{\Gamma(y)} \Big\{\Big(F(x, y, p(x, y)) - p(x, y)F_p(x, y, p(x, y))\Big)dx + F_p(x, y, p(x, y))dy\Big\}. \end{aligned} \tag{1.4.24}$$

Integrala curbilinie (1.4.24) este cunoscută ca integrala invariantă Hilbert (IIH). Întrucât $p(x, y) = y'(x)$ pe extremalele din câmp, pe curba extremală $\Gamma(y^*)$ avem

$$G[y^*] = \int_{\Gamma(y^*)} F(x, y, y')dx = \int_a^b F(x, y^*(x), y^{*\prime}(x))dx = I[y^*] .$$

Vom nota $R(x, y) := F(x, y, p(x, y)) - p(x, y)F_p(x, y, p(x, y)),\ Q(x, y) := F_p(x, y, p(x, y))$. Atunci IIH se poate reprezenta sub forma

$$G[y] = \int_{\Gamma(y)} \{R(x, y)dx + Q(x, y)dy\} . \tag{1.4.25}$$

Remarca 1.4.3. În reprezentarea (1.4.25) pentru funcționala $G[y]$ nu este prezentă coordonata y'. Prin urmare, IIH poate fi privită ca o integrală curbilinie în planul xOy, considerată de-a lungul graficului $\Gamma_0(y)$ a funcției $y(x)$.

Lema 1.4.6. *Integrandul funcționalei $G[y]$ este o diferențială exactă.*

Demonstrație. Întrucât domeniul D ce conține graficul extremalei $y^*(x)$ este simplu conex, integrandul $R(x, y)dx + Q(x, y)dy$ va fi o diferențială exactă dacă $R'_y - Q'_x = 0,\ \forall (x; y) \in D$. Vom arăta că are loc această egalitate în fiecare punct al domeniului D. Avem

$$\begin{aligned} R'_y - Q'_x &= F_y + F_{y'}p'_y - p'_y F_{y'} - p(F_{y'y} + F_{y'y'}p'_y) - F_{y'x} - F_{y'y'}p'_x = \\ &= F_y - F_{y'x} - pF_{y'y} - F_{y'y'}(p'_x + pp'_y). \end{aligned} \tag{1.4.26}$$

Presupunând că $B(x) > 0,\ \forall x \in [a; b]$, vom utiliza forma desfăşurată a EEL:

$$F_y - \frac{d}{dx}\Big(F_{y'}\Big) = -F_{y'x} - F_{y'y}y' - F_{y'y'}y'' + F_y = 0 . \tag{1.4.27}$$

Întrucât $p(x, y(x)) = y'(x)$ pentru extremala $y(x)$, derivând se obține $p_x + p_y y' = y''$. Ultimele două relații permit să se excludă din ecuația (1.4.27) derivatele y' şi y'':

$$-F_{y'x} - F_{y'y}p - F_{y'y'}(p'_x + p'_y p) + F_y = 0 .$$

Ultima relaţie împreună cu (1.4.26) implică identitatea $R'_y - Q'_x = 0, \forall (x;y) \in D$. ■

Din lema 1.4.6 rezultă că IIH este integrala unei diferenţiale exacte şi deci nu depinde de drumul de integrare (de curba ce uneşte în domeniul D (pe care este definit un câmp de extremale) punctele $A(a;y_a)$ şi $B(b;y_b)$), iar pe extremala $y = y^*(x)$ inclusă în acest câmp, coincide cu valoarea funcţionalei $I[y^*]$. Astfel, în studiul creşterii funcţionalei, corespunzătoare variaţiei δy a argumentului, se poate înlocui valoarea funcţionalei $G[y^*]$ pe extremală cu valoarea $G[y]$ a IIH, considerată de-a lungul graficului funcţiei $y = y^* + \delta y$ (dacă elementul δy are normă $\|\cdot\|_C$ suficient de mică, atunci această funcţie are graficul în D). Avem

$$\Delta I = \int_{\Gamma(y)} F(x,y,y')dx - \int_{\Gamma(y^*)} F(x,y,y')dx = \int_{\Gamma(y)} F(x,y,y')dx - G[y^*] = \int_{\Gamma(y)} F(x,y,y')dx - G[y] =$$
$$= \int_{\Gamma(y)} \left\{ F(x,y,y') - F(x,y,p) - (y'-p)F_{y'}(x,y,p) \right\} dx.$$

Integrandul ultimei integrale este FW. Astfel pentru creşterea funcţionalei $\Delta I := I[y] - I[y^*]$ are loc următoarea reprezentare:

$$\Delta I = \int_{\Gamma(y)} \varepsilon(x,y,y',p(x,y))dx ,$$

unde $y = y^* + \delta y$. Menţionăm că pe extremala $y = y^*(x)$ FW este egală cu zero, deoarece în acest caz avem $p(x,y^*(x)) = y^{*\prime}(x)$.

Prin urmare, condiţia ca FW să păstreze semnul în vecinătatea curbei extremale $y^*(x)$ va fi una suficientă pentru ca această extremală să realizeze extrem local al funcţionalei. Extremul va fi slab sau tare în dependenţă de faptul că FW păstrează semnul într-o vecinătate de ordinul zero sau unu a extremalei $y^*(x)$. Dacă $\varepsilon \geq 0$ (≤ 0), atunci şi $\Delta I \geq 0$ (≤ 0).

În cazul în care funcţia $y^*(x)$ este cercetată la extrem local slab este necesar să se verifice semnul FW în puncte apropiate de punctele curbei $\Gamma(y^*)$, adică să se precizeze semnul lui $\varepsilon(x,y,y',p(x,y))$ pentru triplete (x,y,y'), care sunt apropiate de tripletul de numere $(x,y^*(x),y^{*\prime}(x))$. Dacă în aşa puncte $\varepsilon(x,y,y',p(x,y))$ păstrează semnul, atunci funcţia $y^*(x)$ realizează un extrem local slab al funcţionalei.

În cazul în care funcţia $y^*(x)$ se cercetează la extrem local tare, se analizează variaţia semnului FW pentru triplete (x,y,y') în care y este apropiat de $y^*(x)$. FW trebuie să păstreze semnul pentru orice variaţii ale argumentului y', deoarece mărimea $y'(x)$ nu influenţează asupra gradului de apropiere ale funcţiilor $y^*(x)$ şi $y(x)$

în norma $\|\cdot\|_C$.

Dacă FW este continuă, dar îşi modifică semnul în careva puncte $\left(x, y^*(x), y'(x), p(x, y^*(x))\right)$, adică pentru careva valori ale lui y' ea este pozitivă, iar pentru altele – negativă, atunci $y^*(x)$ nu realizează un extrem local tare al funcționalei. Dacă variația semnului are loc pentru puncte $\left(x, y^*(x), y^{*\prime}(x), p(x, y^*(x))\right)$ de pe graficul funcției cercetate, atunci această funcție $y^*(x)$ nu realizează nici extrem local slab.

Uneori problema studiului semnului FW ar putea să fie dificilă, caz în care s-ar putea utiliza alte condiții mai simple, din care rezultă constanța semnului FW. Să presupunem că funcția $F(x, y, y')$ este de trei ori diferențiabilă în raport cu argumentul y'. Utilizând formula lui Taylor avem

$$F(x, y, y') = F(x, y, p) + (y' - p)F_p(x, y, p) + \frac{(y' - p)^2}{2} F_{y'y'}(x, y, q),$$

unde $q = p + \nu(y' - p),\ 0 < \nu < 1$. În acest caz FW ia forma

$$\varepsilon(x, y, y', p) = \frac{(y' - p)^2}{2} F_{y'y'}(x, y, q),$$

iar semnul FW se determină de mărimea $F_{y'y'}$ în careva punct (x, y, q).

Astfel, dacă $F_{y'y'} > 0$ pe tot domeniul de definiție al funcției F, atunci FW păstrează semnul şi orice extremală admisibilă este un punct de extrem local al funcționalei. În cazuri mai complicate este necesar să se verifice semnul lui $F_{y'y'}$ în puncte (x, y, y') pentru care punctul (x, y) este apropiat de graficul funcției analizate $y^*(x)$, iar y' este arbitrar. Dacă în aceste condiții avem că $F_{y'y'}$ păstrează semnul, atunci $y^*(x)$ este un punct de extrem local tare. În fine, dacă $F_{y'y'}$ păstrează semnul în puncte (x, y, y') apropiate de $(x, y^*(x), y^{*\prime}(x))$, adică pentru funcții $y(x)$ apropiate de $y^*(x)$ în norma $\|\cdot\|_{C^1}$, atunci $y^*(x)$ realizează un punct de extrem local slab. Reieşind din cele spuse rezultă:

Teorema 1.4.6. **(Condiţii suficiente de minim local tare)**

Fie integrandul $F(x, y(x), y'(x))$ al funcționalei $I[y(x)]$ din PECV (1.4.3) este funcție de clasă C^3. Funcția $y^* \in C^1[a;b]$ realizează un minim local tare al funcționalei $I[y]$, dacă simultan se îndeplinesc următoarele condiții:

1) *funcția $y^*(x)$ este extremală admisibilă a funcționalei $I[y]$: $y^*(x)$ este soluție a EEL ce satisface condițiile la extremități;*
2) *se satisface condiția tare Weierstrass: $\varepsilon(x, y, y', p) \geq 0$ pentru puncte $(x, y(x))$ din vecinătatea punctelor definite de extremala $y^*(x),\ x \in [a;b]$, şi pentru valori arbitrare*

$y'(x),\ x \in [a;b]$;

3) *Pentru funcția* $y^*(x)$ *se satisface condiția tare Jacobi: pe intervalul* $(a;b]$ *nu sunt puncte conjugate punctului inițial* a.

Remarca 1.4.4.

a) Afirmația teoremei 1.4.6 rămâne adevărată dacă condiția tare Weierstrass se va înlocui cu următoarea condiție de tip Legendre: $F_{y'y'}\left(x, y(x), y'(x)\right) \geq 0$ pentru puncte $(x, y(x))$ din vecinătatea punctelor definite de extremala $y^*(x),\ x \in [a;b]$, şi pentru valori arbitrare $y'(x),\ x \in [a;b]$;

b) Dacă condiția de tip Legendre are loc sub forma $F_{y'y'}\left(x, y(x), y'(x)\right) \leq 0$, sau dacă în condiția tare Weierstrass avem $\varepsilon(x, y, y', p) \leq 0$, atunci condițiile formulate în teorema 1.4.6 sunt condiții suficiente de maxim local tare.

c) Condiția Jacobi reprezintă o condiție necesară de extrem local tare, adică dacă soluția EJ se anulează pentru careva valoare $x \in (a;b]$, atunci extremala $y^*(x)$ nu realizează un extrem local tare.

d) Condiția tare Weierstrass reprezintă o condiție necesară de extrem local tare, adică dacă funcția lui Weierstrass în punctele curbei definite de extremala $y^*(x)$, pentru careva valori $y'(x)$ are semne contrare, atunci extremala $y^*(x)$ nu realizează un extrem local tare.