seminar extins: e) → a) → d) → f) → g) → h)

Tema 5: Condiții necesare și suficiente de extrem relativ în problema elementară de CV.

Vom utiliza următorul algoritm de aflare a extremului în probl. elem. (PE) de Calcul Variațional (CV) de tipul:

$$\text{PE de CV}: \begin{cases} I[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\,dx \to extr \\ y(a) = y_a \;;\; y(b) = y_b \;; \\ y(x) \in C^1[a;b] \;;\; F \in C^2 \text{ în raport cu fiecare variabilă} \end{cases}$$

Pasul I. Se află extremala (extremalele) $y^*(x)$ ca soluție a ec. E-L ce satisface condițiile la extremități.

Pasul II. Se verifică condițiile suficiente de extrem **local** slab sau tare pe extremala (extremalele) determinată la Pasul I.

Dacă condițiile suficiente se verifică, se face concluzie despre tipul extremului (minim sau maxim) **local** tare sau slab, și, dacă este necesar, se calculează valoarea f-lei în soluția găsită.

Dacă însă condițiile suficiente de extrem **local** nu se îndeplinesc, se verifică dacă au loc condiții necesare de extrem (se testează mai multe condiții necesare).

Amintim că în cazul în care nu are loc condiția strictă Legendre nu se poate face concluzie despre lipsa extremului.

Problema 5.1. Să se cerceteze la extrem funcționala $I[y(x)]$ în următoarele probleme de CV:

2) sem. **a)** $I[y(x)] = \int_1^2 (y'(x) + 2y'^3(x))\,dx$, $y(1) = 2$, $y(2) = 6$.

Rezolvare: Avem o problemă elementară (PE) de CV.

Pasul I. Determinăm extremalele f-lei $I[y(x)]$:

$F = y' + 2y'^3 = F(y')$ nu depinde în mod explicit de variabila x și f-cția necun. $y(x)$ ⇒ Cazul 1° de la tema: "Integrale prime ale ec. E-L" ⇒ sol. generală a ec. E-L este:

$y(x) = C_1 x + C_2$. Din cond. pe frontieră aflăm C_1 și C_2:

$$\begin{cases} y(1) = 2 \\ y(2) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ 2C_1 + C_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 4 \\ C_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow y^*(x) = 4x - 2$$ – unica extremală admisibilă a f-lei $I[y(x)]$.

Pasul II. Verificăm cond. suf. de extrem relativ:

mai întâi <u>cond. de extrem relativ tare</u>:

Verificăm dacă se îndeplinește condiția tare a lui Jacobi:

$$\text{ec. Jacobi}: \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right)\right] \cdot \delta y(x) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot \delta y'(x)\right) = 0.$$

Aici $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F(x, y^*(x), y^{*\prime}(x))}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} = \frac{\partial^2 F(x, y^*(x), y^{*\prime}(x))}{\partial y \partial y'}$; $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2 F(x, y^*(x), y^{*\prime}(x))}{\partial y'^2}$, unde $y^*(x)$ - extremala obținută la pasul I.

Avem $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$; $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(1 + 6y'^2\right) = 0$; $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) =$

$= \frac{\partial}{\partial y'}\left(1 + 6y'^2\right) = 12y'$ ⇒ $\frac{\partial^2 F(x, y^*, y^{*\prime})}{\partial y'^2} = 12y^{*\prime}(x) = 12 \cdot 4 = 48$. $(y^{*\prime}(x) = 4)$.

⇒ ec. Jacobi ia forma:

$-\frac{d}{dx}\left(48 \cdot \delta y'(x)\right) = 0 \Leftrightarrow 48\,\delta y''(x) = 0 \Leftrightarrow \delta y''(x) = 0 \Rightarrow \delta y(x) = C_3 x + C_4$ – sol. ec. Jacobi.

Dacă problema la limită $\delta y''(x) = 0$, $\delta y(1) = \delta y(2) = 0$ are <u>doar</u> soluția identic nulă, atunci se îndeplinește condiția tare a lui Jacobi (în caz contrar – nu are loc cond. tare a lui Jacobi).

Dacă admitem că $\delta y(1) = 0 \Rightarrow \delta y(1) = C_3 + C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = -C_3$ ⇒ $\delta y(x) = C_3(x - 1)$.

Dacă admitem că ec. Jacobi are soluție nu identic nulă, atunci $C_3 \neq 0$. Dar atunci, întrucât $x - 1 \neq 0$, $\forall x \in (1;2]$ ⇒ $\delta y(2) \neq 0$ ⇒ $\delta y(x) = C_3(x-1)$ nu este o soluție admisibilă a probl. la limită.

Mai mult, $\delta y(x) \neq 0$, $\forall x \in (1;2]$. ⇒ <u>are loc condiția tare a lui Jacobi</u>.

D/ce integrandul $F=F(\cancel{x,y},y')=y'+2y'^3$ este funcție de clasă C^3 în raport cu y', vom verifica în locul cond. tare Weierstrass – condiția de tip Legendre:

$$\frac{\partial^2 F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'^2}=12y' \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \text{ nu păstrează semn constant (în sensul } \geq 0) \text{ p/u } \forall y' \Rightarrow \text{nu are loc cond. de tip Legendre.}$$

Întrucât cond. de tip Legendre nu este una necesară, problema stabilirii d/ă $y^*(x)=4x-2$ este extrem relativ tare rămâne deschisă.

Atunci verificăm cond. tare Weierstrass:

$$\mathcal{E}(x,y,y',p)=F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)\cdot\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial p};$$

$$F(x,y,y')=y'+2y'^3;\ F(x,y,p)=p+2p^3;\ \frac{\partial F(x,y,p)}{\partial p}=1+6p^2;$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(x,y,y',p)=y'+2y'^3-p-2p^3-(y'-p)\cdot(1+6p^2)=y'-p+2(y'-p)\cdot(y'^2+y'p+p^2)-$$

$$-(y'-p)\cdot(1+6p^2)=(y'-p)\cdot(\cancel{1}+2(y'^2+y'p+p^2)-\cancel{1}-6p^2)=(y'-p)\cdot(2y'^2+2y'p-4p^2)=$$

$$=2(y'-p)\cdot[y'^2-p^2+y'p-p^2]=2(y'-p)\cdot[(y'-p)(y'+p)+p(y'-p)]=2(y'-p)^2\cdot(y'+2p)$$

Se vede că funcția lui Weierstrass $\mathcal{E}(x,y,y',p)=2(y'-p)^2\cdot(y'+2p)$ nu păstrează semn constant (în sensul ≥ 0 sau ≤ 0) p/u $\forall y'$ $\Rightarrow$ nu se satisface cond. tare Weierstrass.

Dar cond. tare Weierstrass este o condiție necesară de extrem și întrucât aceasta nu are loc $\Rightarrow$ $y^*(x)=4x-2$ nu este un p. de extrem relativ tare.

atunci verificăm condițiile de extrem relativ slab:

Condiția lui Jacobi a fost deja verificată. Verificăm acum condiția tare Legendre $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}>0$ pe extremala $y^*(x)$

$$\frac{\partial^2 F(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y'^2}=12y^{*\prime}(x)=48>0,\ \forall x\in[1;2]$$ (păstrează semnul pozitiv pe extremala $y^*(x)=4x-2$)

$\Rightarrow$ are loc condiția tare Legendre pe $y^*(x)$.

În baza criteriului ce ne dă cond. neces. și suficiente de extrem relativ slab concluzionăm:
Extremala $y^*(x)=4x-2$ realizează un minim relativ slab al f-lei $I[y]$ pe MFA.

Valoarea f-lei $I[y(x)]$ în p. de minim relativ slab $y^*(x)=4x-2$ este

$$I[y^*(x)]=\int_1^2(4+2\cdot4^3)\,dx=132.$$

b) $I[y(x)]=\int_0^1\left(y^2(x)+y'^2(x)\right)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1.$

Rezolvare:

PI. Extremala (unică) admisibilă a acestei f-le a fost găsită în Problema 4.1 a):

$$y^*(x)=\frac{e}{e^2-1}\cdot e^x+\frac{e}{1-e^2}\cdot e^{-x}.$$

PII. Verificăm cond. suf. de extrem relativ:

extrem relativ tare:

cond. Jacobi?

ec. Jacobi: $$\left[\frac{\partial^2F(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y^2}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2F(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y\partial y'}\right)\right]\cdot\delta y(x)-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2F(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y'^2}\cdot\delta y'(x)\right)=0$$

$$F=y^2+y'^2;\ \frac{\partial^2F}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(2y)=2;$$

$$\frac{\partial^2F}{\partial y\partial y'}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(2y')=0;\ \frac{\partial^2F}{\partial y'^2}=\frac{\partial}{\partial y'}(2y')=2$$

$$\Rightarrow 2\delta y(x)-\frac{d}{dx}(2\delta y'(x))=0 \Leftrightarrow \delta y''(x)-\delta y(x)=0 \text{ – ec. Jacobi} \Rightarrow \text{EDLO}.$$

ec. caract.: $\lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm1 \Rightarrow$ SG: $y_{SGEO}(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$ – sol. gen. a ec. Jacobi

Ne interesează d/ă problema la limită: $\delta y''(x)-\delta y(x)=0$, $\delta y(0)=\delta y(1)=0$ are sau nu soluție unică și anume cea trivială $\delta y(x)\equiv 0$.

D/a admitem că soluţia $\delta y(x)$ a probl. la limită satisface $\delta y(0)=0 \Rightarrow C_1+C_2=0 \Rightarrow C_2=-C_1$

$\Rightarrow \delta y(x)=C_1 e^{x}-C_1 e^{-x}=C_1(e^{x}-e^{-x})$

P/u ca $\delta y(x)$ să nu fie identic nulă $\Rightarrow C_1 \neq 0$

Întrucât pe $[0;1]$ avem $e^{x}-e^{-x}\neq 0 \Rightarrow \delta y(x)\neq 0$ pentru $x\in(0;1]$.

În particular, $\delta y(1)\neq 0$, adică $\delta y(x)$ nu este soluţie a probl. la limită.

$\Rightarrow$ Problema la limită are doar o singură soluţie $\Rightarrow$ soluţia nulă.

$\Rightarrow$ se satisface cond. lui Jacobi.

Integrandul $F=y^2+y'^2 \in C^3$ în raport cu $y'(x)$ $\Rightarrow$ vom verifica cond. de tip Legendre: $\frac{\partial^2 F(x,y(x),y'(x))}{\partial y'^2}\geq 0$ (sau ≤ 0) p/u $(x,y(x))$ din vecin. lui $(x,y^*(x))$, $x\in[a;b]$ şi p/u valori arbitrare $y'(x)$, $x\in[a;b]$.

Avem: $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=2>0$, $\forall y'$ $\Rightarrow$ are loc cond. de tip Legendre (p/u $\forall y'$)

$\Rightarrow$ Conform criteriului ce defineşte cond. neces. şi suficiente de extrem relativ tare al f-lei $I[y(x)]$, curba $y^*(x)=\frac{e}{e^2-1}\cdot e^{x}+\frac{e}{1-e^2}\cdot e^{-x}$ realizează un minim relativ tare al f-lei $I[y(x)]$ pe MFA.

Întrucât $y^*(x)\in C^1[0;1]$, această curbă $y^*(x)$ realizează şi un minim relativ slab al f-lei $I[y(x)]$ pe MFA.

1) sem **c)** $I[y(x)]=\int_{-1}^{0}(12xy(x)-y'^2(x))dx$, $y(-1)=1$, $y(0)=0$.

Rezolvare: I Unica extremală admisibilă (punct staţionar) al f-lei $I[y(x)]$ date a fost găsită în problema **4.1b)**. Aceasta este $y^*(x)=-x^3$.

$F_y-\frac{d}{dx}(F_{y'})=0 \Leftrightarrow 12x+2y''=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y''=-6x \Rightarrow y'=-3x^2+C_1 \Rightarrow y=-x^3+C_1x+$
$\begin{cases} y(-1)=1 \\ y(0)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=0 \\ C_2=0\end{cases} \Rightarrow y^*(x)=-$

PII. Verificăm cond. suf. de extrem relativ:

extrem relativ tare:

ec. lui Jacobi: $\left[\frac{\partial^2 F(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y^2}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y\partial y'}\right)\right]\delta y(x)-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y'^2}\cdot\delta y'(x)\right)=$

$F=12xy-y'^2$; $\frac{\partial^2 F(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y^2}=0$; $\frac{\partial^2 F(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y\partial y'}=0$; $\frac{\partial^2 F(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y'^2}=-2$.

$\Rightarrow$ Ecuaţia lui Jacobi este:

$-\frac{d}{dx}\left(-2\delta y'(x)\right)=0 \Leftrightarrow \delta y''(x)=0 \Rightarrow \delta y(x)=C_1x+C_2$

Verificăm cond. lui Jacobi:

D/a admitem că ~~sy~~ $\delta y(-1)=0 \Rightarrow -C_1+C_2=0 \Rightarrow C_1=C_2 \Rightarrow \delta y(x)=C_1(x+1)$

P/u ca $\delta y(x)$ să nu fie identic nulă este necesar ca $C_1\neq 0$. Atunci $\delta y(x)\neq 0$, $\forall x\in(-1;0]$, inclusiv $\delta y(0)\neq 0$, adică $\delta y(x)$ nu este soluţie a problemei la limită $\delta y''(x)=0$, $\delta y(-1)=\delta y(0)=0$

$\Rightarrow$ problema la limită are doar o singură soluţie: $\delta y(x)\equiv 0$. $\Rightarrow$ are loc cond. lui Jacobi.

Întrucât $F\in C^3$ în raport cu y', vom verifica cond. tare de tip Legendre:

$\frac{\partial^2 F(x,y,y')}{\partial y'^2}=-2<0$, $\forall y'$ $\Rightarrow$ are loc cond. tare de tip Legendre.

În baza criteriului ce ne dă cond. neces. şi suficiente de extrem relativ tare al f. lei $I[y(x)]$ putem concluziona, că extremala $y^*(x)=-x^3$ realizează un maxim relativ tare al f-lei $I[y(x)]$ pe MFA (amintim că $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}<0$, $\forall y'$).

Întrucât $y^*(x)=-x^3\in C^1[-1;0]$, curba $y^*(x)$ realiz. şi un maxim relativ slab al lui $I[y(x)]$ pe MFA.

1) sem d) $I[y(x)]=\int_0^{\pi/6}\left(9y^2(x)+2y(x)y'(x)-y'^2(x)\right)dx$, $y(0)=1$; $y(\pi/6)=0$.

PI) Vom găsi extremalele admisibile ale f-lei $I[y(x)]$:

$F=9y^2+2yy'-y'^2$; $\frac{\partial F}{\partial y}=18y+2y'$; $\frac{\partial F}{\partial y'}=2y-2y'$;

ec. E-L.: $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \Leftrightarrow 18y+\cancel{2y'}-\cancel{2y'}+2y''=0 \Leftrightarrow y''+9y=0$ - EDLO.

ec. caract.: $\lambda^2+9=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm 3i \Rightarrow y_{SGEO}(x)=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$

Coef. C_1 și C_2 se determ. utilizând cond. pe frontieră:

$\begin{cases} y(0)=1 \\ y(\pi/6)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=0 \end{cases} \Rightarrow y^*(x)=\cos 3x$ - extremala (unică) admisib. a f-lei $I[y(x)]$

PII) Verificăm cond. suf. de extrem relativ:
mai întâi cond. suf. de extrem relativ tare:

Cond. tare a lui Jacobi:

ec. lui Jacobi: $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\right)\right)\cdot\delta y(x)-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot\delta y'(x)\right)=0.$

$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 F(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y^2}=18$; $\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}=\frac{\partial^2 F(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y\partial y'}=2$;

$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=\frac{\partial^2 F(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y'^2}=-2$;

$\Rightarrow$ ec. lui Jacobi: $(18-0)\cdot\delta y(x)-\frac{d}{dx}\left(-2\delta y'(x)\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \delta y''(x)+9\delta y(x)=0$ - EDLO.

ec. caract.: $\lambda^2+9=0 \Rightarrow \delta y(x)=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$.

Dacă admitem că $\delta y(0)=0 \Rightarrow C_1=0 \Rightarrow \delta y(x)=C_2\sin 3x$;

P/u ca $\delta y(x)=C_2\sin 3x$ să fie soluție netrivială a ec. lui Jacobi este necesar ca $C_2\neq 0$, iar atunci $\delta y(x)=C_2\sin 3x\neq 0$, $\forall x\in(0;\pi/6]$. ($\sin 3x>0$ pe $(0;\pi/6]$)

$\Rightarrow \delta y(\pi/6)\neq 0 \Rightarrow \delta y(x)=C_2\sin 3x$ nu este soluția problemei la limită

$\delta y''(x)+9\delta y(x)=0$, $\delta y(0)=\delta y(\pi/6)=0$.

Prin urmare, problema la limită menționată are doar soluție nulă $\delta y(x)\equiv 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ se satisface cond. lui Jacobi.

Întrucât $F=9y^2+2yy'-y'^2\in C^3$ în raport cu y' $\Rightarrow$ vom verifica cond. tare de tip Legendre:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=\frac{\partial^2 F(x,y,y')}{\partial y'^2}=-2<0 \text{ p/u } \forall y' \Rightarrow \text{are loc cond. tare de tip Legendre}$$

$\Rightarrow$ conform. criteriului ce ne dă cond. neces. și suf. de extrem relativ tare, întrucât $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}<0$ p/u $\forall y'$, rezultă că extemala admisibilă $y^*(x)=\cos 3x$ realizează un maxim relativ tare al f-lei $I[y(x)]$ pe MFA.

D/ce $y^*(x)=\cos 3x\in C^1[0;\pi/6] \Rightarrow y^*(x)=\cos 3x$ realiz. și un maxim relativ slab al lui $I[y(x)]$ pe MFA.

Exem 2) $I[y(x)] = \int_1^2 \frac{x^3}{(y'(x))^2}\,dx$, $y(1)=1$, $y(2)=4$.

Rezolvare: Avem o PE de CV.

PI) Aflăm extremalele admisibile ale f-ţiei $I[y(x)]$:

$F = \frac{x^3}{y'^2} = F(x,y')$ nu depinde în mod explicit de $y(x) \Rightarrow$ cazul 4°

$\Rightarrow$ integrala primă a ec. lui E-L este integrala impulsului $\frac{\partial F}{\partial y'} = C = const \Leftrightarrow -\frac{2x^3}{y'^3} = C \Rightarrow$

$\Rightarrow y'^3 = -\frac{2}{C}x^3 = C_1^3 x^3$; $C_1^3 := -\frac{2}{C}$.

$\Rightarrow y'(x) = C_1 x \Rightarrow y(x) = \frac{C_1}{2}x^2 + C_2$. Din cond. la extremităţi ~~pe frontieră~~ găsim

$$\begin{cases} y(1)=1 \\ y(2)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{C_1}{2}+C_2=1 \\ 2C_1+C_2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=2 \\ C_2=0 \end{cases} \Rightarrow y^*(x)=x^2 \text{ - extremala admisibilă a f-ţiei } I[y(x)].$$

PII. Vom verifica cond. suf. de extrem relativ

mai întâi cond. de extrem relativ tare:

$y^{*\prime}(x)=2x$

Condiţia lui Jacobi:

$$\frac{\partial^2 F(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y^2} = 0;\ \frac{\partial^2 F(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y\,\partial y'} = 0;\ \frac{\partial^2 F(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y'^2} = \frac{6x^3}{y'^4}\Big|_{y^*=x^2} = \frac{6x^3}{16x^4} = \frac{3}{8x}.$$

ec. lui Jacobi: $\left[\frac{\partial^2 F(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y\,\partial y'}\right)\right]\cdot\delta y(x) - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial^2 F(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y'^2}\cdot\delta y'(x)\right] = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{8x}\cdot\delta y'(x)\right) = 0 \Rightarrow \frac{3}{8x}\,\delta y'(x) = C_3 \Rightarrow \delta y'(x) = \frac{8C_3x}{3} = C_4x$; $C_4 := \frac{8}{3}C_3$

$\Rightarrow \delta y(x) = C_4\cdot\frac{x^2}{2} + C_5$ – sol. generală a ec. lui Jacobi.

Fie $\delta y(1)=0 \Rightarrow \frac{C_4}{2}+C_5=0 \Rightarrow C_5 = -\frac{C_4}{2} \mapsto \delta y(x) = \frac{C_4}{2}(x^2-1)$. Dacă ec. lui Jacobi ar avea soluţie neidentic nulă pe $[1;2]$, atunci $C_4 \neq 0$, dar în acest caz $\delta y(x) \neq 0$, $\forall x \in (1;2]$, inclusiv în $\delta y(2) \neq 0$.

Prin urmare, problema ~~lui Cauchy~~ (la limită) pentru ec. lui Jacobi $\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{8x}\delta y'(x)\right)=0 \\ \delta y(1)=\delta y(2)=0 \end{cases}$ are doar o singură soluţie – cea identic nulă $\delta y(x)\equiv 0$.

$\Rightarrow$ are loc cond. lui Jacobi.

Întrucât funcţia $F = \frac{x^3}{y'^2}$ este discontinuă p/u $y'(x)\equiv 0$, nu este posibil de utilizat condiţia de tip Legendre. De aceea vom analiza d/ă păstrează semnul funcţia Weierstrass:

$$\mathcal{E}(x,y,y',p) = F(x,y,y') - F(x,y,p) - (y'-p)\cdot\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial p}$$

p/u puncte $(x,y(x))$ apropiate de punctele de pe extremala $y^*(x)$ şi pentru valori arbitrare y'.

Avem

$$\mathcal{E}(x,y,y',p) = \frac{x^3}{y'^2} - \frac{x^3}{p^2} - (y'-p)\cdot\frac{(-2)\cdot x^3}{p^3} = \frac{x^3p^3 - x^3y'^2p + 2(y'-p)x^3y'^2}{y'^2\cdot p^3};$$

$$x^3p^3 - x^3y'^2p + 2(y'-p)x^3y'^2 = x^3(y'-p)\cdot(-p(p+y') + 2y'^2) = x^3(y'-p)\cdot(2y'^2 - py' - p^2) =$$

$$= x^3(y'-p)\cdot(y'-p)(2y'+p)$$

$y'^2 - p^2 + y'^2 - py' = (y'-p)(y'+p) \dots$

$$\mapsto \mathcal{E}(x,y,y',p) = \frac{x^3\cdot(y'-p)^2\cdot(2y'+p)}{\underset{\neq 0}{y'^2}\cdot p^3}$$

Atunci când $x\in[1;2]$ avem $x^3>0$, dar în schimb expresia $(2y'+p)$ p/u y' arbitrare poate să ia atât valori pozitive, cât şi negative? De aceea, funcţia $\mathcal{E}(x,y,y',p)$ nu păstrează semnul şi astfel nu se îndeplineşte cond. tare Weierstrass.

Întrucât cond. Weierstrass reprezintă o cond. necesară de extrem relativ tare?, putem concluziona că extremala $y^*(x)=x^2$ nu realizează un extrem relativ tare.

Verificăm acum cond. de extrem relativ slab:

Condiţia lui Jacobi a fost verificată mai sus.

Întrucât pe extremala $y^*(x)=x^2$ avem $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x,y^*,y^{*\prime})=\frac{3}{8x}>0,\ \forall x\in[1;2]$

$\Rightarrow$ are loc condiția tare Legendre. $\Rightarrow$ conform crit. ce ne dă cond. neces. și suf. de extrem

relativ slab $\Rightarrow$ extremala $y^*(x)=x^2$ realizează un minim relativ slab.

Valoarea minimă a f-lei este:

$$I[y^*(x)]=\int_1^2\frac{x^3dx}{(y^{*\prime}(x))^2}=\int_1^2\frac{x^3}{(2x)^2}dx=\frac{1}{4}\cdot\int_1^2 x\,dx=\frac{1}{4}\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}.$$

5/sem. **f)** $I[y(x)]=\int_0^a (y'(x))^3dx,\ y(0)=0,\ y(a)=b,\ a>0,\ b>0.$

Rezolvare:

PI) Vom afla extremalele admisibile ale f-lei $I[y(x)]$.

$F=y'^3=F(y')$ nu depinde în mod explicit de x și $y(x)$ $\Rightarrow$ cazul 1° $\Rightarrow y(x)=C_1x+C_2$ - sol. gen. a ec. E-L.

$\begin{cases}y(0)=0\\y(a)=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_2=0\\C_1a+C_2=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=b/a\\C_2=0\end{cases}\Rightarrow y^*(x)=\frac{b}{a}x$ - extremala admisibilă a f-lei $I[y(x)]$.

$y^{*\prime}(x)=\frac{b}{a}$

PII) Verificăm condițiile de extrem relativ pe extremala $y^*(x)$:

condițiile de extrem relativ tare:

condiția lui Jacobi:

$$\frac{\partial^2F(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y^2}=0;\ \frac{\partial^2F(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y\partial y'}=0;\ \frac{\partial^2F}{\partial y'^2}(x,y^*,y^{*\prime})=6y^{*\prime}=\frac{6b}{a}.$$

ec. lui Jacobi va fi: $(F=F(x,y^*,y^{*\prime}))$

$$\left(\frac{\partial^2F}{\partial y^2}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2F}{\partial y\partial y'}\right)\right)\cdot\delta y(x)-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2F}{\partial y'^2}\cdot\delta y'(x)\right)=0\Leftrightarrow-\frac{d}{dx}\left(\frac{6b}{a}\delta y'(x)\right)=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \delta y''(x)=0\Rightarrow\delta y(x)=C_3x+C_4$ - sol. generală a ec. lui Jacobi.

Dacă $\delta y(0)=0\Leftrightarrow C_4=0\Rightarrow\delta y(x)=C_3x$

Dacă ec. lui Jacobi ar avea soluție ~~nenulă~~ neidentic nulă, atunci $C_3\neq0$. $\Rightarrow\delta y(x)\neq0,\forall x\in(0;a]$, inclusiv $\delta y(a)\neq0$. $\Rightarrow$ pe $(0;a]$ nu sunt puncte conjugate p. inițial $x=0$.

Problema la limită $\delta y''(x)=0,\ \delta y(0)=\delta y(a)=0$, are doar o singură soluție - soluția identic nulă.

$\Rightarrow$ se satisface cond. lui Jacobi.

Întrucât $F=y'^3\in C^3$ în raport cu y' vom verifica cond. de tip Legendre:

$\frac{\partial^2F(x,y,y')}{\partial y'^2}=6y'$ $\Rightarrow$ nu păstrează semn constant pt. orice y' $\Rightarrow$ nu se verifică cond. de tip Legendre.

Verificăm dacă se îndeplinește cond. tare Weierstrass:

$\mathcal{E}(x,y,y',p)=F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)\cdot\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial p}=y'^3-p^3-(y'-p)\cdot3p^2=$

$=(y'-p)\cdot(y'^2+y'p+p^2)-(y'-p)\cdot3p^2=(y'-p)\cdot(y'^2+y'p-2p^2)=(y'-p)\cdot[(y'-p)(y'+p)+p(y'-p)]=$

$=(y'-p)^2\cdot(y'+2p)$ $\Rightarrow\mathcal{E}(x,y,y',p)$ nu păstrează semn constant pt. $\forall y'$, d/ce nu păstrează semnul termenul $y'+2p$. $\Rightarrow$ nu se verif. cond. tare Weierstrass și întrucât ultima este o cond. necesară de extrem $\Rightarrow$ $y^*(x)=\frac{bx}{a}$ nu realizează un extrem relativ tare.

verificăm condițiile de extrem relativ slab:

Verificăm condiția tare ~~de~~ Legendre: $\frac{\partial^2F(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y'^2}>0\quad(<0)$

$\frac{\partial^2F(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y'^2}=\frac{6b}{a}>0\quad(a>0,b>0)$ $\Rightarrow$ se verifică cond. tare Legendre.

D/ce se verifică și cond. Jacobi $\Rightarrow$ conform criteriului ce ne dă cond. neces. și suficiente de extrem relativ slab, extremala $y^*(x)=\frac{b}{a}x$ realizează un ~~extrem~~ minim relativ slab al f-lei $I[y(x)]$.

3 sem g) $I[y(x)] = \int_0^a (y'^2(x) - y^2(x))dx$, $y(0)=0$, $y(a)=0$, $a>0$, $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Rezolvare:

PI) Aflăm extremalele admisibile ale funcționalei $I[y(x)]$:

ec. E-L.: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$;

$F = y'^2 - y^2$; $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y$; $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$; $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2y''$

$\Rightarrow$ ec. E-L.: $-2y - 2y'' = 0 \Leftrightarrow y'' + y = 0$ – EDLO.

ec. caracteristică: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \Rightarrow y_{SGEO}(x) = C_1\cos x + C_2 \sin x$ – sol. gen. a ec. E-L.

$\begin{cases} y(0)=0 \\ y(a)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1\cos a + C_2 \sin a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y^*(x) \equiv 0$ – extremala admisibilă a f-lei $I[y(x)]$.

P2) Verificăm cond. suficiente de extrem relativ:

extrem relativ tare:

cond. lui Jacobi:

$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y^*, y^{*\prime}) = -2$; $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}(x, y^*, y^{*\prime}) = 0$; $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y^*, y^{*\prime}) = 2$;

$F = F(x, y^*, y^{*\prime})$

ec. lui Jacobi: $\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right)\right] \cdot \delta y(x) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot \delta y'(x)\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\delta y(x) - \frac{d}{dx}\left(2\delta y'(x)\right) = 0 \Leftrightarrow \delta y''(x) + \delta y(x) = 0$ – EDLO.

$\Rightarrow \delta y(x) = C_3 \cos x + C_4 \sin x$ – sol. generală a ec. lui Jacobi.

Admitem că $\delta y(0) = 0 \Rightarrow \delta y(0) = C_3 = 0 \Rightarrow \delta y(x) = C_4 \sin x$;

P/u ca ec. lui Jacobi să aibă soluție netrivială (nenulă) ~~este~~ necesar ca $C_4 \neq 0$ ~~$\Rightarrow \delta y(x) \neq 0, \forall x \in ($~~

Atunci avem

$\delta y(x) \neq 0, \forall x \in (0; a], a < \pi$

$\delta y(x) = 0, \forall x \in (0; a], a \geq \pi$ (se analizează în $x = \pi$)

$\Rightarrow$ p/u $a \geq \pi$ nu se satisface cond. lui Jacobi. D/ce cond. lui Jacobi este o cond. necesară de extrem $\Rightarrow y^*(x) = 0$ nu este un extrem relativ tare (și nici slab) p/u $a \geq \pi$.

În cazul în care $0 < a < \pi$ se satisface cond. lui Jacobi.

Întrucât $F \in C^3$ în raport cu y' vom verifica cond. tare de tip Legendre:

$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 2 > 0, \forall y' \Rightarrow$ se satisf. cond. tare de tip Legendre

$\Rightarrow$ conform crit. ce ne dă cond. suf. de extrem relativ tare, atunci când $0 < a < \pi$, extremala $y^*(x) \equiv 0$ realizează un minim relativ tare.

seminar h) $I[y(x)] = \int_0^a \left(6y'^2(x) - y'^4(x) + y(x) \cdot y'(x)\right) dx$, $y(0) = 0$, $y(a) = b$; $a > 0$, $b > 0$.

PI) Determinăm extremalele admisibile ale f-lei $I[y(x)]$ ca soluție a ec. lui E-L:

$F = 6y'^2 - y'^4 + y \cdot y'$; $\frac{\partial F}{\partial y} = y'$; $\frac{\partial F}{\partial y'} = 12y' - 4y'^3 + y$; $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 12y'' - 12y'^2 y'' + y$

ec. E-L: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \Leftrightarrow 12y''(y'^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y' = \pm 1 \\ y'' = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y(x) = \pm x + C \\ y(x) = C_2 x + C_3 \end{array}\right.$

$\Rightarrow y(x) = C_2 x + C_3$ – sol. generală a ec. E-L.

$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(a) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_3 = 0 \\ C_2 a + C_3 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = b/a \\ C_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow y^*(x) = \frac{b}{a} x$ – extremala admisibilă a lui $I[y(x)]$

PII) Verificăm cond. suf. de extrem relativ:

mai întâi cond. extrem relativ tare:

condiția lui Jacobi:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Big|_{y=y^*} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\Big|_{y=y^*} = 1 ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\Big|_{y=y^*} = 12 - 12y'^2 = 12(1-y^{*\prime 2}) = 12\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)$$

ec. lui Jacobi:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Big|_{y=y^*} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\Big|_{y=y^*}\right)\right)\cdot \delta y(x) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\Big|_{y=y^*}\cdot \delta y'(x)\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{d}{dx}\left(12\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\cdot\delta y'(x)\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta y''(x) = 0 \Rightarrow \delta y(x) = C_4 x + C_5 .$$

Admitem că ecuația lui Jacobi are ~~soluție unică~~ soluție nenulă $\delta y(x)$ și că

$\delta y(0)=0 \Rightarrow C_5 = 0 \Rightarrow \delta y(x) \equiv C_4 x , \ C_4 \neq 0 \Rightarrow \delta y(x) \neq 0, \forall x \in (0;a] \quad (a>0)$

în particular, $\delta y(a) \neq 0$.

$\Rightarrow$ problema la limită $\delta y''(x)=0$, $\delta y(0)=\delta y(a)=0$ are soluție unică — ~~soluția~~ funcția identic nulă.

pe $(0;a]$ nu se conțin p. conjugate p. 0 (zero)

$\Rightarrow$ are loc condiția lui Jacobi.

Dacă $F \in C^3$ în raport cu y' verificăm cond. de tip Legendre:

$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 12 - 12y'^2 = 12(1-y'^2)$ nu păstrează semnul pentru orice y'.

$\Rightarrow$ nu ~~se verifică~~ are loc cond. de tip Legendre.

În acest caz vom verifica cond. tare Weierstrass:

$$\mathcal{E}(x,y,y',p) := F(x,y,y') - F(x,y,p) - (y'-p)\cdot\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial p} = 6y'^2 - y'^4 + yy' - 6p^2 + p^4 - py -$$

$$-(y'-p)\cdot(12p - 4p^3 + y) = 6(y'-p)(y'+p) - (y'^2-p^2)(y'^2+p^2) + y(y'-p) - (y'-p)(12p-4p^3+y)$$

$$= (y'-p)\cdot\left(6y'+6p - (y'+p)(y'^2+p^2) + y - 12p + 4p^3 - y\right) =$$

$$= (y'-p)\left(6(y'-p) - y'^3 - p^2y' - py'^2 - p^3 + 4p^3\right) = (y'-p)\cdot\left[6(y'-p) - (y'^3-p^3) - p^2(y'-p) - p(y'^2-p^2)\right] = (y'-p)^2\cdot\left[6 - y'^2 - py' - p^2 - p^2 - py' - p^2\right] =$$

$$= (y'-p)^2\cdot(-1)\cdot\left(y'^2+2py' - (6-3p^2)\right)$$

Ne interesează comportamentul lui $y'^2+2py'-(6-3p^2)$

$y'^2+2py'-(6-3p^2)=0 \Rightarrow y'_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2+6-3p^2} = -p \pm \sqrt{6-2p^2}$

$\Rightarrow \mathcal{E}(x,y,y',p)$ se anulează pentru $y' = -p \pm \sqrt{6-2p^2}$

$p(x,y) = \left(\frac{b}{a}x\right)'_x = \frac{b}{a} > 0$ Atenție!!!

I) dacă $6-2p^2 \leq 0 \Rightarrow p^2 \geq 3 \Rightarrow p \geq \sqrt{3} \Rightarrow y'_{1,2} \in \mathbb{C}$

$y'^2+2py'-6+3p^2 = (y'+p)^2+2p^2-6 \geq (y'+p)^2 \geq 0, \forall y'. \Rightarrow \mathcal{E}(x,y,y',p) \leq 0, \forall y'$

$\Rightarrow$ p/u $p=\frac{b}{a} \geq \sqrt{3}$ extremala $y^*(x)=\frac{b}{a}x$ realizează un maxim relativ tare al f-lei $I[y]$ pe MFA.

II) d/ă $6-2p^2>0 \Rightarrow p^2<3 \Rightarrow p<\sqrt{3}$ $\left(p=\frac{b}{a}>0\right)$

$\Rightarrow$ semnul expresiei $y'^2+2py'-(6-3p^2)$ va depinde de y'

De exemplu, p/u $p=1 \Rightarrow y'^2+2py'-(6-3p^2) = y'^2+2y'-3 <0$ d/ă $y'=0$ și $y'^2+2y'-3>0$ d/ă $y'=2$.

$\Rightarrow$ pentru $p=\frac{b}{a}<\sqrt{3}$ cond. tare Weierstrass nu se verifică $\Rightarrow$ pe $y^*(x)=\frac{b}{a}x$ nu se realizează un extrem relativ tare p/u $p=\frac{b}{a}<\sqrt{3}$.

Verificăm cond. suf. de extrem relativ slab p/u $p=\frac{b}{a}<\sqrt{3}$.

Condiția Jacobi are loc (vezi mai sus).

D/ce $F \in C^3$ în raport cu y' $\Rightarrow$ verificăm cond. tare Legendre:

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right|_{y=y^*} = 12(1-y^{*\prime 2}) = 12\cdot\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right) = 12(1-p^2);$$

iii) P/u $p>1 \overset{(p<\sqrt{3})}{\Longrightarrow} \left.\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right|_{y=y^*} < 0 \Rightarrow y^*(x)=\frac{b}{a}x$ realizează un maxim relativ slab.

iv) P/u $p=\frac{b}{a}<1 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right|_{y=y^*} > 0 \Rightarrow y^*(x)=\frac{b}{a}x$ realizează un minim relativ slab.

v) P/u $p=\frac{b}{a}=1 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right|_{y=y^*} = 0 \Rightarrow$ nu se îndepl. cond. tare Legendre.

$\Rightarrow$ Cercetăm funcția lui Weierstrass p/u $p=1$:

$$\mathcal{E}(x,y,y',p) = -(y'-p)^2\cdot(y'^2+2py'-(6-3p^2))\Big|_{p=1} = -(y'-1)^2\cdot(y'^2+2y'-3)$$

$$y'^2+2y'-3=0 \Rightarrow y'_{1,2} = -1\pm 2 \Rightarrow y'_1=1;\ y'_2=-3.$$

Întrucât $y'=1$ este o rădăcină simplă a ec. $y'^2+2y'-3=0 \Rightarrow$ p/u valori ale lui y' apropiate de valoarea $p=1$, f-ția Weierstrass $\mathcal{E}(x,y,y',p)$ nu păstrează constant semnul $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ nu se verifică cond. Weierstrass. Întrucât cond. lui Weierstrass este una necesară $\Rightarrow$ p/u $p=1$ pe extremala $y^*(x)=\frac{b}{a}x$ nu se realizează un extrem relativ slab.