1.5. Generalizări ale problemei elementare de calcul variațional

În unele probleme variaționale ce reprezintă modele matematice ale unor probleme aplicative, funcționalele depind de mai multe funcții necunoscute, de derivate de ordinul întâi, cât şi de ordin superior ale acestora. De exemplu, în mecanica clasică, descrierea poziției punctului material în spațiu la momentul de timp t necesită trei variabile $(x(t), y(t), z(t))$. Problema formei axei unei grinzi încovoiate, cu anumite condiții la extremități, se reduce la aflarea valorii extremale a energiei potențiale a sistemului, care este dependentă de curbura grinzii, iar aceasta din urmă se exprimă prin derivatele de ordinul întâi şi doi ale funcției necunoscute. Descrierile matematice a astfel de probleme reprezintă generalizări ale problemei elementare de calcul variațional.

Raționamentele utilizate în vederea obținerii EEL pot fi aplicate și la problemele variaționale cu funcționale ce conțin derivate de ordin superior ale mai multor funcții necunoscute. Evident, în acest caz mulțimea funcțiilor admisibile va fi una mai restrânsă.

1.5.1. Problema variaţională cu funcţională ce depinde de mai multe funcţii variabile

Fie $\Omega := [a;b]\times\Delta_{2n}\subset\mathbb{R}^{2n+1}$ $(a,b\in\mathbb{R},\ \Delta_{2n}\subset\mathbb{R}^{2n})$ o mulțime deschisă, iar $F:\Omega\to\mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1. Să considerăm mulțimea

$$\mathcal{A} := \left\{\overline{y}(x):[a;b]\to\mathbb{R}^n \mid \overline{y}(x)=(y_1(x),...,y_n(x)),\, y_i(x)\in C^1[a;b],\, i=\overline{1,n},\ \left(x,\overline{y}(x),\overline{y}'(x)\right)\in\Omega,\ \forall x\in[a;b]\right\},$$

unde $\overline{y}'(x)=\left(y_1'(x),...,y_n'(x)\right)$.

Lema 1.5.1. *Mulțimea* $\mathcal{A}$ *este o submulțime deschisă a spațiului normat* $C^1([a;b];\mathbb{R}^n)$.

Demonstrația este analogică cu cea pentru lema 1.3.1.

Să considerăm următoarea problemă de CV:

$$\begin{gathered} I\left[\overline{y}(x)\right]=\int_a^b F(x,\overline{y}(x),\overline{y}'(x))dx\to extr, \\ \overline{y}(x)\in D:=\left\{\overline{y}(x)\in\mathcal{A} \mid \overline{y}(a)=\overline{y}_a,\ \overline{y}(b)=\overline{y}_b\right\}, \end{gathered} \tag{1.5.1}$$

unde $\overline{y}_a,\overline{y}_b\in\mathbb{R}^n$ sunt vectori definiți. De remarcat că în cazul dat extremalele funcționalei $I\left[\overline{y}(x)\right]$ sunt vector-funcții $\overline{y}^*(x)=\left(y_1^*(x),...,y_n^*(x)\right)^T$.

Întrucât vector-funcțiile $\overline{y}(x)\in D$ au valori fixate în extremitățile segmentului $[a;b]$, variațiile admisibile ale acestora vor fi

$$\delta\overline{y}(x)\in H:=\left\{\delta\overline{y}(x):[a;b]\to\mathbb{R}^n \mid \delta\overline{y}(x)=\left(\delta y_1(x),...,\delta y_n(x)\right),\ \delta y_i(x)\in C^1[a;b],\ \delta y_i(a)=\delta y_i(b)=0, i=\overline{1,n}\right\}.$$

Rezultatul de bază ce conține condițiile necesare de extrem al funcționalei $I\left[\overline{y}(x)\right]$ este dat de:

***Teorema 1.5.1**. Dacă vector-funcția $\overline{y}^*(x)=\left(y_1^*(x),...,y_n^*(x)\right)^T\in D$ realizează un extrem local al funcționalei $I:D\to\mathbb{R}$ (definită prin relația (1.5.1)) pe MFA D, atunci funcțiile $y_1^*(x),...,y_n^*(x)$ sunt componente ale soluției sistemului de ecuații diferențiale:*

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}\left(F_{y_i'}\right)=0,\ i=\overline{1,n}, \tag{1.5.2}$$

unde $F_{y_i}:=F_{y_i}\left(x,\overline{y}^*(x),\overline{y}^{*\prime}(x)\right),\ F_{y_i'}:=F_{y_i'}\left(x,\overline{y}^*(x),\overline{y}^{*\prime}(x)\right)\ (x\in[a;b])$.

Demonstrație. Pentru o variație admisibilă arbitrară $\delta\overline{y}(x)\in H$ să considerăm funcția de n variabile reale $\varphi(\overline{\alpha})$ $(\overline{\alpha}=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n)$, definită în modul următor:

$$\varphi(\overline{\alpha}):=I\left[y_1(x)+\alpha_1\delta y_1(x),...,y_n(x)+\alpha_n\delta y_n(x)\right].$$

Evident, dacă vector-funcția $\overline{y}^*(x)=\left(y_1^*(x),...,y_n^*(x)\right)^T$ realizează un extrem al funcționalei $I\left[\overline{y}(x)\right]$, atunci funcția $\varphi(\overline{\alpha})$ are un extrem în punctul $\overline{0}:=(0,...,0)\in\mathbb{R}^n$. Prin urmare, pentru funcția $\varphi(\overline{\alpha})$ au loc condițiile necesare de extrem:

$$\left.\frac{\partial\varphi(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_i}\right|_{\overline{\alpha}=0}=0,\ i=\overline{1,n}.$$

Utilizând notațiile $Y_i(x):=y_i^*(x)+\alpha_i\delta y_i(x),\ i=\overline{1,n}$, precum şi formulele (1.3.5) şi (1.3.6), se obține

$$\left.\frac{\partial\varphi(\overline{\alpha})}{\partial\alpha_i}\right|_{\overline{\alpha}=0}=\left.\int_a^b\frac{\partial F(x,Y_1,...,Y_n,Y_1',...,Y_n')}{\partial\alpha}dx\right|_{\overline{\alpha}=0}=\left.\int_a^b\left\{\frac{\partial F}{\partial Y_i}\frac{\partial Y_i}{\partial\alpha_i}+\frac{\partial F}{\partial Y_i'}\frac{\partial Y_i'}{\partial\alpha_i}\right\}dx\right|_{\overline{\alpha}=0}=\left.\int_a^b\left\{\frac{\partial F}{\partial Y_i}\delta y_i+\frac{\partial F}{\partial Y_i'}\delta y_i'\right\}dx\right|_{\overline{\alpha}=0}=$$

$$=\int_a^b\left\{F_{y_i}\delta y_i+F_{y_i'}\delta y_i'\right\}dx=0,\ i=\overline{1,n}, \tag{1.5.3}$$

unde $F_{y_i}=\dfrac{\partial F}{\partial y_i}\left(x,\overline{y}^*(x),\overline{y}^{*\prime}(x)\right),\ F_{y_i'}=\dfrac{\partial F}{\partial y_i'}\left(x,\overline{y}^*(x),\overline{y}^{*\prime}(x)\right)$.

Conform ipotezei teoremei avem $F_{y_i}\left(x,\overline{y}^*(x),\overline{y}^{*\prime}(x)\right)\in C[a;b],\ F_{y_i'}\left(x,\overline{y}^*(x),\overline{y}^{*\prime}(x)\right)\in C[a;b]$, $(i=\overline{1,n})$. Atunci, ținând cont că egalitatea (1.5.3) are loc pentru orice $\delta y_i(x)\in C^1[a;b]$ $(i=\overline{1,n})$ supusă condițiilor $\delta y_i(a)=\delta y_i(b)=0$, conform lemei 1.2.4 deducem că există $\dfrac{d}{dx}\left(F_{y_i'}\left(x,\overline{y}^*(x),\overline{y}^{*\prime}(x)\right)\right)\in C[a;b]$ $(i=\overline{1,n})$ şi are loc relația (1.5.2). ■

Remarca 1.5.1. Ecuațiile definite de relația (1.5.2) reprezintă sistemul de EEL asociat funcționalei (1.5.1).

Algoritm de aflare a extremalelor admisibile ale funcționalei definite în problema (1.5.1):

α) Se scrie sistemul de EEL:

$$F_{y_i}\left(x, \overline{y}^*(x), \overline{y}^{*\prime}(x)\right) - \frac{d}{dx}\left(F_{y_i'}\left(x, \overline{y}^*(x), \overline{y}^{*\prime}(x)\right)\right) = 0,\ i = \overline{1,n}.$$

β) Se află soluția generală a sistemului de EEL:

$$y_i = y_i(x, c_1, \ldots, c_{2n}),\ i = \overline{1,n}.$$

γ) Se determină coeficienții $c_1, \ldots, c_{2n}$ din condițiile la extremități:

$$\begin{cases} y_i(a, c_1, \ldots, c_{2n}) = y_i^a,\ i = \overline{1,n} \\ y_i(b, c_1, \ldots, c_{2n}) = y_i^b,\ i = \overline{1,n} \end{cases}.$$

Înlocuind în $y_i,\ i = \overline{1,n}$, valorile obținute ale constantelor $c_1, \ldots, c_{2n}$, se obțin extremalele admisibile de forma $\overline{y}^*(x) = \left(y_1^*(x), \ldots, y_n^*(x)\right)^T$.

Exemplul 1.5.1. *Să se afle extremalele funcționalei $I : D \to \mathbb{R}$, unde*

$$I[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^{\pi/2} \left(2y_1(x)y_2(x) - 2y_1^2(x) + y_1'^2(x) - y_2'^2(x)\right)dx,$$

$$D := \left\{\overline{y}(x) = (y_1(x), y_2(x)) \middle|\ y_i(x) \in C^1[0;\pi/2],\ i = 1,2,\ y_1(0) = y_2(0) = 0,\ y_1(\pi/2) = y_2(\pi/2) = 1\right\}.$$

Se scrie sistemul de EEL:

$$\begin{cases} 2y_2 - 4y_1 - 2y_1'' = 0, \\ 2y_1 + 2y_2'' = 0. \end{cases}$$

Din a doua ecuație a sistemului avem $y_1 = -y_2''$. Expresia obținută pentru y_1 se substituie în prima ecuație a sistemului. Se obține ecuația diferențială liniară omogenă (EDLO) cu coeficienți constanți $y_2^{IV} + 2y_2'' + y_2 = 0$. Rădăcinile ecuației caracteristice asociate $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$ sunt $\lambda_{1,2} = \pm i$, ambele de multiplicitate 2. Atunci soluția generală a EDLO are forma

$$y_2(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3 x\cos x + c_4 x\sin x\,, \tag{1.5.4}$$

iar

$$y_1(x) = (c_1 - 2c_4)\cos x + (c_2 + 2c_3)\sin x + c_3 x\cos x + c_4 x\sin x\,. \tag{1.5.5}$$

Relațiile (1.5.4) şi (1.5.5) generează familia de extremale admisibile ale funcționalei.

Coeficienții $c_j\ (j = \overline{1,4})$ se determină din condițiile la extremități:

$$\begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \\ y_1(\pi/2) = 1 \\ y_2(\pi/2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - 2c_4 = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_2 + 2c_3 + \pi c_4/2 = 1 \\ c_2 + \pi c_4/2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \end{cases}.$$

Astfel se obține extremala admisibilă

$$\overline{y}^*(x)=\left(y_1^*(x),y_2^*(x)\right)=\left(\sin x,\sin x\right). \ \blacksquare$$

1.5.2. Problema variațională cu funcțională ce depinde de derivate de ordin superior ale funcției necunoscute

Fie $\Omega:=[a;b]\times\Delta_{m+1}$ $(a,b\in\mathbb{R},\ \Delta_{m+1}\subset\mathbb{R}^{m+1})$ o mulțime deschisă, iar $F:\Omega\to\mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1. Să considerăm mulțimea

$$\mathcal{A}:=\left\{y(x):[a;b]\to\mathbb{R}\mid y(x)\in C^m[a;b],\left(x,y(x),y'(x),...,y^{(m)}(x)\right)\in\Omega,\ \forall x\in[a;b]\right\},$$

unde $y^{(j)}(x)$ $(j=\overline{0,m})$ sunt derivatele de ordinul j ale funcției $y(x)$, $y^{(0)}(x)\equiv y(x)$.

Lema 1.5.2. *Mulțimea $\mathcal{A}$ este o submulțime deschisă a spațiului normat $C^m[a;b]$.*

Demonstrația este analogică cu cea pentru lema 1.3.1.

Să considerăm următoarea problemă de CV:

$$\begin{gathered}I\left[y(x)\right]=\int_a^b F(x,y(x),y'(x),...,y^{(m)}(x))dx\to extr,\\ y(x)\in D:=\left\{y(x)\in\mathcal{A}\mid y^{(j)}(a)=y_a^j,\ y^{(j)}(b)=y_b^j,\ j=\overline{0,m-1}\right\},\end{gathered}\tag{1.5.6}$$

unde valorile $y_a^j,y_b^j\in\mathbb{R}$ $(j=\overline{0,m-1})$ sunt date.

Întrucât derivatele $y^{(j)}(x)$ $(j=\overline{0,m-1})$ ale funcțiilor $y(x)\in D$ au valori fixate în extremitățile segmentului $[a;b]$, variațiile admisibile ale acestora vor fi

$$\delta y(x)\in H:=\left\{\delta y(x):[a;b]\to\mathbb{R}\mid \delta y(x)\in C^m[a;b],\ \delta y^{(j)}(a)=\delta y^{(j)}(b)=0,\ j=\overline{0,m-1}\right\}.$$

Rezultatul de bază ce conține condițiile necesare de extrem al funcționalei $I\left[y(x)\right]$ este dat de:

Teorema 1.5.2. *Fie funcția $F(x,y(x),y'(x),...,y^{(m)}(x))$ de clasă C^1. Dacă funcția $y^*(x)\in D$ realizează un extrem local al funcționalei $I:D\to\mathbb{R}$ (definită prin relația (1.5.6)) pe MFA D, atunci $y^*(x)$ este soluție a ecuației diferențiale*

$$\sum_{j=0}^m(-1)^j\frac{d^j}{dx^j}\left(F_{y^{(j)}}(x)\right)=0,\tag{1.5.7}$$

unde $F_{y^{(j)}}:=F_{y^{(j)}}\left(x,y^*(x),y^{*\prime}(x),...,y^{*(m)}(x)\right),\ j=\overline{0,m}$ $(y^{(0)}\equiv y,\ x\in[a;b])$.

Demonstrație. Pentru o funcție admisibilă $y(x)\in D$ şi o variație arbitrară $\delta y(x)\in H$ fixată să considerăm funcția $\varphi(\alpha)$ de variabilă reală α, definită în modul următor:

$$\varphi(\alpha):=I\left[y(x)+\alpha\delta y(x)\right]=\int_a^b F(x,y(x)+\alpha\delta y(x),y'(x)+\alpha\delta y'(x),...,y^{(m)}(x)+\alpha\delta y^{(m)}(x))dx,$$

unde $\delta y^{(j)}(x)$ este derivata de ordinul j a variației $\delta y(x)$.

Evident, dacă funcția $y=y^*(x)$ realizează un extrem al funcționalei $I\left[y(x)\right]$, atunci funcția $\varphi(\alpha)$ are un extrem în punctul $\alpha=0$. Întrucât $\varphi(\alpha)$ este derivabilă în acest punct, avem $\varphi'(\alpha)\big|_{\alpha=0}=0$. Utilizând notațiile $Y(x):=y(x)+\alpha\delta y(x)$, precum şi formulele (1.3.5) şi (1.3.6), se obține

$$\varphi'(\alpha)\big|_{\alpha=0}=\int_a^b \frac{\partial F(x,Y,Y',...,Y^{(m)})}{\partial\alpha}dx\Bigg|_{\alpha=0}=\int_a^b\left\{\frac{\partial F}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial\alpha}+\frac{\partial F}{\partial Y'}\frac{\partial Y'}{\partial\alpha}+...+\frac{\partial F}{\partial Y^{(m)}}\frac{\partial Y^{(m)}}{\partial\alpha}\right\}dx\Bigg|_{\alpha=0}=$$

$$=\int_a^b\left\{\frac{\partial F}{\partial Y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial Y'}\delta y'+...+\frac{\partial F}{\partial Y^{(m)}}\delta y^{(m)}\right\}dx\Bigg|_{\alpha=0}=\int_a^b\left\{F_y\delta y+F_{y'}\delta y'+...+F_{y^{(m)}}\delta y^{(m)}\right\}dx=0, \tag{1.5.8}$$

unde derivatele parțiale $F_y,F_{y'},...,F_{y^{(m)}}$ se calculează în punctul $\left(x,y^*(x),y^{*\prime}(x),...,y^{*(m)}(x)\right)$.

Să considerăm funcțiile $h_0(x):=\int_x^a F_y(t)dt,\ h_j(x):=\int_x^b\left(h_{j-1}(t)+F_{y^{(j)}(t)}\right)dt\ (j=\overline{1,m-1})$ de clasă $C^1[a;b]$ (există derivatele continue $h_0'(x):=-F_y(x),\ h_j'(x):=-\left(h_{j-1}(x)+F_{y^{(j)}}\right),\ j=\overline{1,m-1}$). Ținând cont de acestea, precum şi de expresia (1.5.8) pentru variația de ordinul întâi a funcționalei, avem

$$\delta I[y;\delta y]=\int_a^b\left\{-h_0'\delta y+F_{y'}\delta y'+F_{y''}\delta y''+...+F_{y^{(m)}}\delta y^{(m)}\right\}dx.$$

Întrucât $\delta y\in H$, integrând prin părți, se obține

$$I_1:=\int_a^b\left\{-h_0'\delta y+F_{y'}\delta y'\right\}dx=-h_0\delta y\Big|_{x=a}^{x=b}+\int_a^b\left(h_0+F_{y'}\right)\delta y'dx=\int_a^b -h_1'\delta y'dx=-h_1\delta y'\Big|_{x=a}^{x=b}+\int_a^b h_1\delta y''dx=\int_a^b h_1\delta y''dx;$$

$$I_2:=I_1+\int_a^b F_{y''}\delta y''dx=\int_a^b\left(h_1+F_{y''}\right)\delta y''dx=\int_a^b -h_2'\delta y''dx=-h_2\delta y''\Big|_{x=a}^{x=b}+\int_a^b h_2\delta y'''dx=\int_a^b h_2\delta y'''dx;$$

....

$$I_{m-1}:=I_{m-2}+\int_a^b F_{y^{(m-1)}}\delta y^{(m-1)}dx=\int_a^b\left(h_{m-2}+F_{y^{(m-1)}}\right)\delta y^{(m-1)}dx=\int_a^b -h_{m-1}'\delta y^{(m-1)}dx=$$

$$=-h_{m-1}\delta y^{(m-1)}\Big|_{x=a}^{x=b}+\int_a^b h_{m-1}\delta y^{(m)}dx=\int_a^b h_{m-1}\delta y^{(m)}dx;$$

$$I_m:=I_{m-1}+\int_a^b F_{y^{(m)}}\delta y^{(m)}dx=\int_a^b\left(h_{m-1}+F_{y^{(m)}}\right)\delta y^{(m)}dx.$$

Conform condiției necesare de extrem de ordinul I avem $\delta I[y;\delta y]=0,\ \forall\delta y\in H$, şi, întrucât $\delta I[y;\delta y]=I_m$, rezultă că

$$\int_a^b\left(h_{m-1}+F_{y^{(m)}}\right)\delta y^{(m)}dx=0,\ \forall\delta y\in H.$$

Conform lemei 1.2.3 (generalizarea lemei du Bois-Reymond) are loc relația:

$$h_{m-1}(x)+F_{y^{(m)}}(x)=P_{m-1}(x), \tag{1.5.9}$$

unde $P_{m-1}(x)$ este un polinom algebric de grad cel mult $m-1$ (cu coeficienți reali). Din relația (1.5.9) rezultă că $F_{y^{(m)}}(x)=-h_{m-1}(x)+P_{m-1}(x)\in C^1[a;b]$, iar atunci

$\frac{d}{dx}\left(F_{y^{(m)}}(x)\right)=h_{m-2}(x)+F_{y^{(m-1)}}(x)+P'_{m-1}(x)$. De aici avem $\frac{d}{dx}\left(F_{y^{(m)}}(x)\right)-F_{y^{(m-1)}}(x)=h_{m-2}(x)+P'_{m-1}(x)\in C^1[a;b]$, iar

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(F_{y^{(m)}}(x)\right)-F_{y^{(m-1)}}(x)\right)=-\left(h_{m-3}(x)+F_{y^{(m-2)}}(x)\right)+P''_{m-1}(x).$$

Procedând în acelaşi mod, se obţine:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(F_{y^{(m)}}(x)\right)-\frac{d}{dx}\left(F_{y^{(m-1)}}(x)\right)+F_{y^{(m-2)}}(x)=-h_{m-3}(x)+P''_{m-1}(x)\in C^1[a;b],$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2}{dx^2}\left(F_{y^{(m)}}(x)\right)-\frac{d}{dx}\left(F_{y^{(m-1)}}(x)\right)+F_{y^{(m-2)}}(x)\right)=h_{m-4}(x)+F_{y^{(m-3)}}(x)+P'''_{m-1}(x),$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\left(F_{y^{(m)}}(x)\right)-\frac{d^2}{dx^2}\left(F_{y^{(m-1)}}(x)\right)+\frac{d}{dx}\left(F_{y^{(m-2)}}(x)\right)-F_{y^{(m-3)}}(x)=h_{m-4}(x)+P'''_{m-1}(x)\in C^1[a;b],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}}\left(F_{y^{(m-k+1)}}(x)\right)=(-1)^{m+2}h_0(x)+P_{m-1}^{(m-1)}(x),$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}}\left(F_{y^{(m-k+1)}}(x)\right)\right)=(-1)^{m+3}F_y(x),$$

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k}\frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}}\left(F_{y^{(m-k)}}(x)\right)=0.$$

Aici s-a ţinut cont că $F_{y^{(0)}}:=F_y$, $\frac{d^0}{dx^0}\left(F_{y^{(j)}}(x)\right):=F_{y^{(j)}}(x)$. După înmulţirea la $(-1)^m$, apoi efectuarea substituţiei $m-k=j$, se obţine relaţia (1.5.7). ■

Remarca 1.5.2. Ecuaţia definită de relaţia (1.5.7) este numită *ecuaţia Euler-Poisson* (prescurtat EEP) asociată funcţionalei (1.5.6).

Remarca 1.5.3. Ecuaţia (1.5.7) se obţine mai simplu în cazul în care funcţia $F(x,y(x),y'(x),...,y^{(m)}(x))$ este de clasă C^{m+1} pe Ω, iar $y^*(x)\in\tilde{D}:=D\cap C^{2m}[a;b]$ realizează un extrem local al funcţionalei $I[y(x)]$ pe MFA $\tilde{D}$. Într-adevăr, dacă funcţia $y^*(x)\in C^{2m}[a;b]$, atunci, utilizând integrarea prin părţi şi condiţiile la extremităţi, se obţine

$$\int_a^b F_{y'}\delta y'dx=-\int_a^b\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)\delta y dx,\ \int_a^b F_{y''}\delta y''dx=\int_a^b\frac{d^2}{dx^2}\left(F_{y''}\right)\delta y dx,\ \ldots,\ \int_a^b F_{y^{(m)}}\delta y^{(m)}dx=(-1)^m\int_a^b\frac{d^m}{dx^m}\left(F_{y^{(m)}}\right)\delta y dx.$$

Substituind expresiile obţinute în relaţia (1.5.8) avem

$$\int_a^b\left\{F_y-\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(F_{y''}\right)+\ldots+(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}\left(F_{y^{(m)}}\right)\right\}\delta y dx=0. \tag{1.5.10}$$

Aici $F_{y^{(m)}}$ conţine funcţia $y^{(m)}(x)$, iar la derivarea de m ori după x a lui $F_{y^{(m)}}$ apare $y^{(2m)}(x)$; pentru ca termenul $\frac{d^m}{dx^m}\left(F_{y^{(m)}}\right)$ să reprezinte o funcţie continuă este suficient ca

$y^{(2m)}(x)$ să fie continuă. Anume aici este utilă condiția suplimentară $y^*(x) \in C^{2m}[a;b]$.

Conform ipotezei teoremei avem $F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(F_{y''}\right) + \ldots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}\left(F_{y^{(m)}}\right) \in C[a;b]$. Atunci, ținând cont că relația (1.5.10) are loc pentru orice $\delta y(x) \in C^1[a;b]$ supusă condițiilor $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$, conform lemei 1.2.5 (lema lui Lagrange) se deduce că are loc relația (1.5.7). ■

Remarca 1.5.4. Condițiile impuse la demonstrarea remarcei 1.5.3 pentru cazul particular $m=1$ diferă de cele impuse în teorema 1.3.1 (teorema lui Euler) doar prin faptul că funcția $y^*(x)$ ce realizează extremul funcționalei este de clasă $C^2[a;b]$. Condițiile mai puțin restrictive impuse asupra funcției $y^*(x)$ în teorema 1.3.1 sunt datorate utilizării lemei 1.2.4. De menționat că şi în cazul dat e posibilă obținerea unei ecuații de tip EEP fără a impune restricții exagerat de dure asupra funcției $y^*(x)$ (existența derivatelor acesteia rezultă din restricțiile inițiale).

Algoritm de aflare a extremalelor admisibile ale funcționalei definite în problema (1.5.6):

α) Se scrie EEP:

$$F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(F_{y''}\right) + \ldots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}\left(F_{y^{(m)}}\right) = 0 .$$

β) Se găseşte soluția generală a EEP:

$$y = y(x, c_1, \ldots, c_{2m}) .$$

γ) Se determină coeficienții $c_1, \ldots, c_{2m}$ din condițiile:

$$\begin{cases} y(a, c_1, \ldots, c_{2m}) = y_a, \\ y(b, c_1, \ldots, c_{2m}) = y_b, \\ y^{(j)}(a, c_1, \ldots, c_{2m}) = y_a^{(j)},\ j = \overline{1, m-1}, \\ y^{(j)}(b, c_1, \ldots, c_{2m}) = y_b^{(j)},\ j = \overline{1, m-1}. \end{cases}$$

Înlocuind în y valorile obținute ale constantelor $c_1, \ldots, c_{2m}$, se obțin extremalele admisibile $y^*(x)$.

Exemplul 1.5.2. *Să se afle extremalele funcționalei* $I : D \to \mathbb{R}$*, unde*

$$I[y(x)] = \int_0^{\pi/4} \left(y''^2(x) - 16 y^2(x) + x e^x \right) dx,$$

$$D := \left\{ y(x) : [a;b] \to \mathbb{R} \mid y(x) \in C^2[a;b],\ y(0) = 1,\ y(\pi/4) = 0,\ y'(0) = 0,\ y'(\pi/4) = -2 \right\}.$$

Ținând cont că $m=2$ EEP va avea forma: $F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(F_{y''}\right) = 0 \Leftrightarrow y^{(IV)}(x) - 16 y(x) = 0$.

Aceasta reprezintă o EDLO cu coeficienți constanți. Rădăcinile ecuației caracteristice asociate $\lambda^4 - 16 = 0$ sunt $\lambda_{1,2} = \pm 2,\ \lambda_{3,4} = \pm 2i$. Prin urmare, soluția generală a EEP (familia de extremale ale funcționalei) este:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x .$$

Coeficienții $c_j,\ j = \overline{1,4}$ se determină din condițiile la extremități:

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y(\pi/4)=0 \\ y'(0)=0 \\ y'(\pi/4)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 e^{\pi/2} + c_2 e^{-\pi/2} + c_4 = 0 \\ 2c_1 - 2c_2 + 2c_4 = 0 \\ 2c_1 e^{\pi/2} - 2c_2 e^{-\pi/2} - 2c_3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 = c_4 = 0 \\ c_3 = 1 \end{cases}.$$

Astfel funcționala posedă o extremală admisibilă $y^*(x) = \cos 2x$. ■

1.5.3. Problema variațională cu funcțională ce depinde de derivate de ordin superior ale mai multor funcții necunoscute.

Fie $\Omega := [a;b] \times \Delta_{(m+1)n} \subset \mathbb{R}^{(m+1)n+1}$ $(a,b \in \mathbb{R},\ \Delta_{(m+1)n} \subset \mathbb{R}^{(m+1)n})$ o mulțime deschisă, iar $F : \Omega \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1. Să considerăm mulțimea

$$\mathcal{A} := \left\{ \overline{y}(x) : [a;b] \to \mathbb{R}^n \mid \overline{y}(x) = (y_1(x),...,y_n(x)), y_i(x) \in C^m[a;b],\ i = \overline{1,n},\ \left(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x),...,\overline{y}^{(m)}(x)\right) \in \Omega,\ \forall x \in [a;b] \right\},$$

unde $\overline{y}^{(j)}(x) = \left(y_1^{(j)}(x),...,y_n^{(j)}(x)\right)$ $(j = \overline{0,m}),\ y_i^{(j)}(x)$ este derivata de ordinul j a funcției $y_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$, $\overline{y}^{(0)}(x) \equiv \overline{y}(x)$.

Lema 1.5.3. *Mulțimea $\mathcal{A}$ este o submulțime deschisă a spațiului normat $C^m([a;b];\mathbb{R}^n)$.*

Demonstrația este analogică cu cea pentru lema 1.3.1.

Să considerăm următoarea problemă de CV:

$$\begin{aligned} & I\left[\overline{y}(x)\right] = \int_a^b F(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x),...,\overline{y}^{(m)}(x))dx \to extr, \\ & \overline{y}(x) \in D := \left\{ \overline{y}(x) \in \mathcal{A} \mid \overline{y}^{(j)}(a) = \overline{y}_a^j, \overline{y}^{(j)}(b) = \overline{y}_b^j, j = \overline{0,m-1} \right\} \end{aligned} \tag{1.5.11}$$

unde $\overline{y}_a^j, \overline{y}_b^j \in \mathbb{R}^n$ $(j = \overline{0,m-1})$. De remarcat că în cazul dat extremalele funcționalei $I\left[\overline{y}(x)\right]$ sunt vector-funcții $\overline{y}^*(x) = \left(y_1^*(x),...,y_n^*(x)\right)^T$.

Întrucât derivatele $\overline{y}^{(j)}(x)$ $(j = \overline{0,m-1})$ ale vector-funcțiilor $\overline{y}(x) \in D$ au valori fixate în extremitățile segmentului $[a;b]$, variațiile admisibile ale acestora vor fi

$$\delta\overline{y}(x) \in H := \left\{ \delta\overline{y}(x) = \left(\delta y_1(x),...,\delta y_n(x)\right) \mid \delta y_i(x) \in C^m[a;b],\ i = \overline{1,n}; \delta\overline{y}^{(j)}(a) = \delta\overline{y}^{(j)}(b) = 0, j = \overline{0,m-1} \right\},$$

unde $\delta\overline{y}^{(j)}(x) = \left(\delta y_1^{(j)}(x),...,\delta y_n^{(j)}(x)\right)$.

Urmează rezultatul de bază ce conține condițiile necesare de extrem al funcționalei $I\left[\overline{y}(x)\right]$:

Teorema 1.5.3. *Fie funcția $F(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x),...,\overline{y}^{(m)}(x))$ de clasă C^{m+1}. Dacă vector-funcția $\overline{y}^*(x) \in D \cap C^{2m}([a;b];\mathbb{R}^n)$ realizează un extrem local al funcționalei $I : D \to \mathbb{R}$ (definită prin relația (1.5.11)) pe MFA $D \cap C^{2m}([a;b];\mathbb{R}^n)$, atunci $\overline{y}^*(x)$ este soluție a sistemului de ecuații* *diferențiale Euler-Poisson:*

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx}\left(F_{y_i'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(F_{y_i''}\right) - ... + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}\left(F_{y_i^{(m)}}\right) = 0,\ i = \overline{1,n}\,, \tag{1.5.12}$$

unde $F_{y_i^{(j)}} := F_{y_i^{(j)}}\left(x, \overline{y}^*(x), \overline{y}^{*\prime}(x), ..., \overline{y}^{*(m)}(x)\right),\ j = \overline{0,m}\ \ (y_i^{(0)} \equiv y_i,\ x \in [a;b])$.

Demonstrația teoremei simplu se obține prin combinarea demonstrațiilor teoremelor 1.5.1 şi 1.5.2.

Algoritm de aflare a extremalelor admisibile ale funcționalei definite în problema (1.5.11):

α) Se scrie sistemul de EEP (1.5.12).

β) Se găseşte soluția generală a sistemului de EEP:

$$y_i = y_i(x, c_1, ..., c_{2mn}),\ i = \overline{1,n}\,.$$

γ) Se determină coeficienții $c_1, ..., c_{2mn}$ din condițiile:

$$\begin{cases} y_i(a, c_1, ..., c_{2mn}) = y_i^a,\ i = \overline{1,n}, \\ y_i(b, c_1, ..., c_{2mn}) = y_i^b,\ i = \overline{1,n}, \\ y_i^{(j)}(a, c_1, ..., c_{2mn}) = y_i^{a\,(j)},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m-1}, \\ y_i^{(j)}(b, c_1, ..., c_{2mn}) = y_i^{b\,(j)},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m-1}. \end{cases}.$$

Înlocuind în $y_i,\ i = \overline{1,n}$, valorile obținute ale constantelor $c_1, ..., c_{2mn}$, se obțin extremalele admisibile de forma $\overline{y}^*(x) = \left(y_1^*(x), ..., y_n^*(x)\right)^T$.

Remarca 1.5.5. Ordinele derivatelor superioare ale funcțiilor $y_1(x), ..., y_n(x)$ din problema (1.5.11) pot să fie distincte. Aceasta conduce către ordine distincte ale ecuațiilor diferențiale în sistemul de EEP. Numărul condițiilor la extremități pentru fiecare funcție necunoscută corespunde ordinului derivatei superioare a acesteia.

Exemplul 1.5.3. *Să se afle extremalele funcționalei $I : D \to \mathbb{R}$, unde*

$$I[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^1 \left((x+1)^3 y_1''^2(x) + y_2'''^2(x)\right) dx,$$

$$D := \left\{ \overline{y}(x) : [a;b] \to \mathbb{R}^2 \mid \overline{y}(x) = (y_1(x), y_2(x)), y_1(x) \in C^2[0;1],\ y_2(x) \in C^3[0;1], \right.$$

$$\left. y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 0,\ y_1(1) = 1/2,\ y_2(1) = 1,\ y_1'(0) = -1,\ y_2'(0) = 0,\ y_1'(1) = -1/4,\ y_2'(1) = 3,\ y_2''(0) = 0,\ y_2''(1) = 6 \right\}.$$

Se observă că ordinul derivatei superioare a funcției $y_1(x)$ este egal cu 2, iar cel al funcției $y_2(x)$ este egal cu 3. Se scrie sistemul de EEP:

$$\begin{cases} F_{y_1} - \dfrac{d}{dx}\left(F_{y_1'}\right) + \dfrac{d^2}{dx^2}\left(F_{y_1''}\right) = 0, \\ F_{y_2} - \dfrac{d}{dx}\left(F_{y_2'}\right) + \dfrac{d^2}{dx^2}\left(F_{y_2''}\right) - \dfrac{d^3}{dx^3}\left(F_{y_2'''}\right) = 0. \end{cases}$$

Componentele acestuia vor fi: $F = (x+1)^3 y_1''^2 + y_2'''^2,\ F_{y_1} = F_{y_2} = F_{y_1'} = F_{y_2'} = F_{y_2''} = 0,\ F_{y_1''} = 2(x+1)^3 y_1'',$

$\frac{d^2}{dx^2}\left(F_{y_1''}\right)=12(x+1)y_1''+12(x+1)^2y_1'''+2(x+1)^3y_1^{(IV)}$, $F_{y_2''}=2y_2'''$, $\frac{d^3}{dx^3}\left(F_{y_2''}\right)=2y_2^{(VI)}$, şi atunci avem sistemul

$$\begin{cases}12(x+1)y_1''+12(x+1)^2y_1'''+2(x+1)^3y_1^{(IV)}=0\\ -2y_2^{(VI)}=0\end{cases}.$$

Vom remarca că prima ecuație a sistemului, de fapt, se poate scrie sub forma $\frac{d^2}{dx^2}\left(F_{y_1''}\right)=0\Leftrightarrow\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(F_{y_1''}\right)\right)=0\Leftrightarrow\frac{d}{dx}\left(6(x+1)^2y_1''+2(x+1)^3y_1'''\right)=0$. Integrând în ambii membri, se obține ecuația $6(x+1)^2y_1''+2(x+1)^3y'''=c_7$. Efectuând substituția $z=y_1''$, se obține următoarea ecuație diferențială liniară neomogenă (EDLN) $(x+1)^3z'+3(x+1)^2z=c_7/2$. Soluția generală a acesteia este suma soluției generale a EDLO corespunzătoare şi a unei soluții particulare a EDLN.

Ecuația omogenă $(x+1)^3z'+3(x+1)^2z=0$ este o ecuație diferențială cu variabile separabile. Întrucât $x+1\neq0,\ \forall x\in[0;1]$, aceasta se va scrie astfel $\frac{dz}{z}=-\frac{3}{x+1}dx$, de unde se obține $z(x)=c(x+1)^{-3}$.

Soluția generală a EDLN se va afla utilizând metoda variației constantei: Pentru $z(x)=\frac{c(x)}{(x+1)^3}$ se calculează derivata $z'(x)=\frac{c'(x)(x+1)^3-3c(x)(x+1)^2}{(x+1)^6}$. Substituind $z(x)$ şi $z'(x)$ în EDLN, se obține $c'(x)=c_7/2$, de unde $c(x)=\frac{c_7}{2}x+c_8$. Atunci $z(x)=\left(\frac{c_7}{2}x+c_8\right)\frac{1}{(x+1)^3}$, iar $y_1''(x)=z(x)=\frac{c_7x+2c_8}{2(x+1)^3}$. Integrând în ambii membri, $y_1'(x)=-\frac{c_7(2x+1)}{4(x+1)^2}-\frac{c_8}{2(x+1)^2}+c_9$, de unde rezultă

$$y_1(x)=-\frac{c_7}{4}\left(\frac{1}{x+1}+2\ln|x+1|\right)+\frac{c_8}{2(x+1)}+c_9x+c_{10}.$$

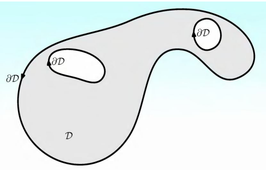
Se rezolvă ecuația a doua a sistemului de EEP, integrând de şase ori consecutiv în ambii membri. Astfel soluția generală a acestei ecuații este $y_2(x)=\frac{c_1}{120}x^5+\frac{c_2}{24}x^4+\frac{c_3}{6}x^3+\frac{c_4}{2}x^2+c_5x+c_6$.

În continuare se utilizează condițiile la extremități pentru a calcula constantele $c_j,\ j=\overline{1,10}$. Se obține $c_3=6, c_8=2$, iar restul constantelor sunt egale cu zero. Unica extremală admisibilă este

$$\overline{y}^*(x)=(y_1^*(x),y_2^*(x))=\left(\frac{1}{x+1},x^3\right).\ \blacksquare$$

1.5.4. Problema variaţională cu funcţională definită prin integrală multiplă

Din considerente de simplitate se va analiza problema variaţională bidimensională, adică problema de aflare a extremului funcţionalei ce depinde de o funcţie de două variabile şi de derivatele parţiale de ordinul I ale acesteia.



des 1.5.1

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit, a cărui frontieră $\partial\Omega$ este formată dintr-un număr finit de curbe netede şi închise, orientate astfel, încât la deplasarea pe acestea, interiorul lui Ω să rămână la stânga (orientare naturală - a se vedea des. 1.5.1).

Fie $U := \Omega \times \Delta_3$ $(\Delta_3 \subset \mathbb{R}^3)$ o mulțime deschisă, iar $F : U \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2. Să considerăm mulțimea

$$\mathcal{A} := \left\{ z : \Omega \to \mathbb{R} \,|\, z \in C^2(\Omega), \left(x, y, z(x,y), z_x(x,y), z_y(x,y) \right) \in U, \forall (x,y) \in \Omega \right\},$$

unde $z_x(x,y), z_y(x,y)$ sunt valorile derivatelor parțiale ale funcției de două variabile $z(x,y)$ în punctul (x,y).

Lema 1.5.4. *Mulțimea $\mathcal{A}$ este o submulțime deschisă a spațiului normat $C^1(\Omega)$.*

Demonstrația este analogică cu cea pentru lema 1.3.1.

Să considerăm următoarea problemă de CV:

$$\begin{gathered} I\left[z(x,y)\right] = \iint_{\Omega} F(x,y,z(x,y),z_x(x,y),z_y(x,y))dxdy \to extr, \\ z(x,y) \in D := \left\{ z \in \mathcal{A} \,|\, z(x,y)\big|_{(x,y)\in\partial\Omega} = f(x,y)\big|_{(x,y)\in\partial\Omega} \right\}, \end{gathered} \tag{1.5.13}$$

unde $z(x,y)$ este funcție necunoscută, iar $f(x,y)\big|_{(x,y)\in\partial\Omega}$ - o funcție dată pe frontiera $\partial\Omega$.

Întrucât funcțiile admisibile $z(x,y) \in D$ au valori fixate pe frontiera $\partial\Omega$, variațiile admisibile ale acestora vor fi

$$\delta z(x,y) \in H := \left\{ \delta z : \Omega \to \mathbb{R} \,|\, \delta z(x,y) \in C^1(\Omega), \, \delta z(x,y)\big|_{(x,y)\in\partial\Omega} \equiv 0 \right\}.$$

Următorul rezultat exprimă condițiile necesare de extrem al funcționalei $I\left[z(x,y)\right]$:

***Teorema 1.5.4*. (Ostrogradski)** *Dacă funcția $z^*(x,y) \in D$ realizează un extrem local al funcționalei $I : D \to \mathbb{R}$ (definită prin relația 1.5.13) pe MFA D, atunci $z^*(x,y)$ este soluție a ecuației diferențiale cu derivate parțiale:*

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}\left(F_{z_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(F_{z_y}\right) = 0, \tag{1.5.14}$$

unde $F_z := \dfrac{\partial F(x,y,z^*,z_x^*,z_y^*)}{\partial z}$, $F_{z_x} := \dfrac{\partial F(x,y,z^*,z_x^*,z_y^*)}{\partial z_x}$, $F_{z_y} := \dfrac{\partial F(x,y,z^*,z_x^*,z_y^*)}{\partial z_y}$, $z := z^*(x,y)$, $(x,y) \in \Omega$.

Demonstrație. Pentru funcția $z(x,y)\in D$ şi o variație admisibilă arbitrară $\delta z(x,y)\in H$ se consideră funcția de variabilă reală $\varphi(\alpha)$, definită în modul următor:

$$\varphi(\alpha):=I\left[z(x,y)+\alpha\delta z(x,y)\right].$$

Parametrul α ia valori mici în modul. Evident, dacă funcția $z=z^*(x,y)$ realizează un extrem al funcționalei $I\left[z(x,y)\right]$, atunci funcția $\varphi(\alpha)$ are un extrem în punctul $\alpha=0$. Prin urmare, pentru funcția $\varphi(\alpha)$ are loc condiția necesară de extrem:

$$\varphi'(\alpha)\big|_{\alpha=0}=0.$$

Utilizând notația $Z:=z^*(x,y)+\alpha\delta z(x,y)$, precum şi teorema despre derivarea integralei multiple dependente de parametru (teorema lui Leibniz) [ ], se obține

$$\varphi'(\alpha)\big|_{\alpha=0}=\iint_{\Omega}\left\{\frac{\partial F(x,y,Z,Z_x,Z_y)}{\partial Z}\delta z+\frac{\partial F(x,y,Z,Z_x,Z_y)}{\partial Z_x}\left(\delta z\right)_x+\frac{\partial F(x,y,Z,Z_x,Z_y)}{\partial Z_y}\left(\delta z\right)_y\right\}dxdy\Bigg|_{\alpha=0}=$$

$$=\iint_{\Omega}\left\{F_z\delta z+F_{z_x}\left(\delta z\right)_x+F_{z_y}\left(\delta z\right)_y\right\}dxdy=0, \tag{1.5.15}$$

unde $F_z:=\dfrac{\partial F(x,y,z^*,z_x^*,z_y^*)}{\partial z}$, $F_{z_x}:=\dfrac{\partial F(x,y,z^*,z_x^*,z_y^*)}{\partial z_x}$, $F_{z_y}:=\dfrac{\partial F(x,y,z^*,z_x^*,z_y^*)}{\partial z_y}$, $z:=z^*(x,y),\ (x,y)\in\Omega$.

Întrucât în relația (1.5.15) este prezentă o integrală dublă, nu este posibil de aplicat integrarea prin părți cu scopul de a evidenția termenul δz. De aceea, la această etapă se va utiliza formula Green-Riemann (FGR) $\displaystyle\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{\partial\Omega}(Pdx+Qdy)$, care permite atingerea rezultatului dorit.

Integrala referitoare la ultimii doi termeni ai relației (1.5.15) se mai poate scrie:

$$\iint_{\Omega}\left\{F_{z_x}\left(\delta z\right)_x+F_{z_y}\left(\delta z\right)_y\right\}dxdy=\iint_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(F_{z_x}\delta z\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(F_{z_y}\delta z\right)\right\}dxdy-\iint_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(F_{z_x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(F_{z_y}\right)\right\}\delta z dxdy. \tag{1.5.16}$$

FGR permite de a transforma prima integrală din membrul drept al relației (1.5.16) într-o integrală pe frontiera $\partial\Omega$ a domeniului Ω:

$$\iint_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(F_{z_x}\delta z\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(F_{z_y}\delta z\right)\right\}dxdy=\oint_{\partial\Omega}\left(F_{z_x}\delta z dy-F_{z_y}\delta z dx\right).$$

Întrucât $\delta z(x,y)\big|_{(x,y)\in\partial\Omega}\equiv 0$, integrala curbilinie este egală cu zero, iar atunci relația (1.5.16) devine:

$$\iint_{\Omega}\left\{F_{z_x}\left(\delta z\right)_x+F_{z_y}\left(\delta z\right)_y\right\}dxdy=-\iint_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(F_{z_x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(F_{z_y}\right)\right\}\delta z\, dxdy,$$

iar relația (1.5.15):

$$\iint_{\Omega}\left\{F_z-\frac{\partial}{\partial x}\left(F_{z_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(F_{z_y}\right)\right\}\delta z\, dxdy=0.$$

Ultima condiție are loc în ipotezele lemei 1.2.6 (varianta 2-dimensională a lemei lui

Lagrange). Într-adevăr $F_z - \frac{\partial}{\partial x}\left(F_{z_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(F_{z_y}\right) \in C(\Omega)$ şi ultima egalitate are loc pentru orice $\delta z(x,y) \in H$. De aici rezultă că are loc relația (1.5.14). ■

Remarca 1.5.6. Relația (1.5.14) se numeşte *ecuația Euler-Ostrogradski* (EEO) asociată funcționalei (1.5.13). Întrucât au loc relațiile:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F_{z_x}\right) = F_{z_x x} + F_{z_x z} z_x + F_{z_x z_x} z_{xx} + F_{z_x z_y} z_{yx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(F_{z_y}\right) = F_{z_y y} + F_{z_y z} z_y + F_{z_y z_x} z_{xy} + F_{z_y z_y} z_{yy},$$

deducem că EEO este o ecuație diferențială cu derivate parțiale (EDDP) de ordinul II.

Remarca 1.5.7. În formularea problemei bidimensionale (1.5.13) asupra funcției admisibile $z(x,y)$ se impune condiția ca aceasta să fie de clasă C^2. De menționat că în varianta I-dimensională a problemei variaționale s-a impus condiția ca funcția admisibilă să fie de clasă C^1, iar mai târziu, după ce s-a obținut EEL, s-a demonstrat că extremalele admisibile nesingulare sunt de fapt de clasă C^2.

Exemplul 1.5.4. *Să se afle extremalele funcționalei* $I : D \to \mathbb{R}$, *unde*

$$I[z(x,y)] = \iint_{\Omega} \left(z_x^2(x,y) + z_y^2(x,y) + x^2 y^2 \right) dxdy,$$

$$z \in D := \left\{ z : \Omega \to \mathbb{R} \,\middle|\, z \in C^2(\Omega),\ z(x,y)\big|_{(x,y)\in\partial\Omega} = \left(x^4 + y^4 - 3/4\right)\big|_{(x,y)\in\partial\Omega} \right\},$$

$$\Omega := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \le 1 \right\},\ \partial\Omega - \textit{frontiera lui } \Omega.$$

EEO este $-\frac{\partial}{\partial x}(2z_x) - \frac{\partial}{\partial y}\left(2z_y\right) = 0$, adică $z_{xx} + z_{yy} = 0$. Prin urmare, problema aflării extremalelor funcționalei $I[z(x,y)]$ se reduce la rezolvarea problemei la limită:

$$\begin{aligned} &\Delta z := z_{xx}(x,y) + z_{yy}(x,y) = 0 \ \ ((x,y) \in \Omega), \\ &z(x,y)\big|_{(x,y)\in\partial\Omega} = \left(x^4 + y^4 - 3/4\right)\big|_{(x,y)\in\partial\Omega} \ \ \left(z \in C^2(\Omega)\right), \end{aligned} \tag{1.5.17}$$

adică a problemei Dirichlet pentru ecuația lui Laplace. Aceasta din urmă se va rezolva prin metoda separării variabilelor. Deoarece EDDP este liniară şi omogenă, e posibil de aplicat principiul superpoziției în construcția soluției generale, sub formă de combinații liniare ale soluțiilor fundamentale. În plus, întrucât domeniul Ω este relativ simplu, folosind un sistem de coordonate convenabil ales, este posibil de separat variabilele, iar EDDP de transformat într-un set echivalent de ecuații diferențiale ordinare.

În continuare se va obține expresia laplaceanului Δz în coordonate polare. Relațiile dintre coordonatele carteziene (x,y) ale unui punct din Ω şi coordonatele sale polare (ρ,θ) sunt date de formulele

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ \rho \in [0;1],\ \theta \in [0;2\pi). \tag{1.5.18}$$

Din considerente de simplitate, pentru $z(x,y)$ ca funcție de ρ şi θ se va folosi tot litera z. În baza formulelor (1.5.18) se deduc relațiile $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=arctg(y/x)$, de unde avem:

$$\rho_x = x/\rho,\ \rho_{xx}=(\rho-x\rho_x)/\rho^2=y^2/\rho^3,\ \theta_x=-y/\rho^2,\ \theta_{xx}=2y\rho_x/\rho^3=2xy/\rho^4, \tag{1.5.19}$$

$$\rho_y = y/\rho,\ \rho_{yy}=(\rho-x\rho_x)/\rho^2=x^2/\rho^3,\ \theta_y=x/\rho^2,\ \theta_{yy}=2y\rho_x/\rho^3=-2xy/\rho^4. \tag{1.5.20}$$

Aplicând regula derivării funcțiilor compuse, avem

$$z_x = z_\rho \rho_x + z_\theta \theta_x,$$

$$z_{xx}=\left(z_\rho\rho_x+z_\theta\theta_x\right)_x=(z_\rho)_x\rho_x+z_\rho\rho_{xx}+(z_\theta)_x\theta_x+z_\theta\theta_{xx}, \tag{1.5.21}$$

$$(z_\rho)_x=z_{\rho\rho}\rho_x+z_{\rho\theta}\theta_x,\ (z_\theta)_x=z_{\theta\rho}\rho_x+z_{\theta\theta}\theta_x, \tag{1.5.22}$$

$$z_y = z_\rho \rho_y + z_\theta \theta_y,$$

$$z_{yy}=\left(z_\rho\rho_y+z_\theta\theta_y\right)_y=(z_\rho)_y\rho_y+z_\rho\rho_{yy}+(z_\theta)_y\theta_y+z_\theta\theta_{yy}, \tag{1.5.23}$$

$$(z_\rho)_y=z_{\rho\rho}\rho_y+z_{\rho\theta}\theta_y,\ (z_\theta)_y=z_{\theta\rho}\rho_y+z_{\theta\theta}\theta_y. \tag{1.5.24}$$

Înlocuind expresiile (1.5.22) şi (1.5.19) în (1.5.21), respectiv expresiile (1.5.24) şi (1.5.20) în (1.5.23), se obține:

$$\begin{gathered}z_{xx}=x^2z_{\rho\rho}/\rho^2-2xyz_{\rho\theta}/\rho^3+y^2z_{\theta\theta}/\rho^4+y^2z_\rho/\rho^3+2xyz_\theta/\rho^4,\\ z_{yy}=y^2z_{\rho\rho}/\rho^2+2xyz_{\rho\theta}/\rho^3+x^2z_{\theta\theta}/\rho^4+x^2z_\rho/\rho^3-2xyz_\theta/\rho^4.\end{gathered}$$

Adunând ultimele două relații, se obține $\Delta z = z_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}z_\rho+\frac{1}{\rho^2}z_{\theta\theta}$, iar atunci problema (1.5.17) se va scrie astfel:

$$\begin{gathered}\rho^2 z_{\rho\rho}+\rho z_\rho+z_{\theta\theta}=0,\\ z\big|_{\partial\Omega}=\left(x^4+y^4-3/4\right)\Big|_{\substack{x=\cos\theta\\ y=\sin\theta}}=\frac{1}{4}\cos(4\theta).\end{gathered} \tag{1.5.25}$$

Conform metodei separării variabilelor soluția problemei se caută sub forma:

$$z(\rho,\theta)=R(\rho)T(\theta). \tag{1.5.26}$$

Ținând cont că $z_\rho=R'(\rho)T(\theta),\ z_{\rho\rho}=R''(\rho)T(\theta),\ z_{\theta\theta}=R(\rho)T''(\theta)$ şi înlocuind aceste expresii în ecuația diferențială din relația (1.5.25), după separarea variabilelor, se obține:

$$\rho^2\frac{R''(\rho)}{R(\rho)}+\rho\frac{R'(\rho)}{R(\rho)}=-\frac{T''(\theta)}{T(\theta)}.$$

Ținând cont că membrul stâng al ultimei ecuații este funcție numai de ρ, iar membrul drept - funcție numai de θ, egalitatea pentru orice ρ şi θ va însemna că ambii membri sunt egali cu o constantă (care se notează cu a). Deci din ultima relație se obține sistemul de ecuații:

$$T''(\theta)+aT(\theta)=0, \tag{1.5.27}$$

$$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-aR(\rho)=0. \tag{1.5.28}$$

Funcția $z(\rho,\theta)$ trebuie să fie periodică în raport cu θ, cu perioada 2π, adică atunci când unghiul θ variază cu 2π, funcția $z(\rho,\theta)$ trebuie să revină la valoarea inițială:

$$z(\rho,\theta+2\pi)=z(\rho,\theta).$$

Pentru aceasta funcția $T(\theta)$ trebuie să fie periodică cu perioada 2π. Astfel avem de determinat valorile parametrului real a pentru care ecuația (1.5.27) are soluții periodice netriviale (problemă Sturm-Liouville). Ecuația menționată este o EDLO cu coeficienți constanți. Ecuația caracteristică asociată acesteia este $\lambda^2+a=0$ cu rădăcinile $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{-a}$.

Cazul $a<0$. Soluția generală a ecuației (1.5.27) este o funcție exponențială reală $T(\theta)=c_1e^{\sqrt{-a}\theta}+c_2e^{-\sqrt{-a}\theta}$, care evident că nu este periodică.

Cazul $a=0$. Soluția generală a ecuației (1.5.27) este $T(\theta)=c_1+c_2\theta$. Coeficienții c_1 şi c_2 se determină astfel încât $T(\theta)$ să fie periodică, cu perioada 2π, adică $T(\theta+2\pi)=T(\theta)$. Se obține $c_2=0$ şi $T(\theta)=c_1=const$ este o soluție trivială, inacceptabilă.

Cazul $a>0$. Soluția generală a ecuației (1.5.27) este $T(\theta)=c_1\cos(\sqrt{a}\theta)+c_2\sin(\sqrt{a}\theta)$. Din condiția $T(\theta+2\pi)=T(\theta)$ şi din faptul că funcțiile $\sin\theta$ şi $\cos\theta$ sunt periodice cu perioada 2π rezultă că $(\theta+2\pi)\sqrt{a}-\theta\sqrt{a}=2k\pi$ sau $2\pi\sqrt{a}=2k\pi$, de unde:

$$a=k^2,\, k\in\mathbb{N}.$$

Deci soluția generală a ecuației (1.5.27) este $T_k(\theta)=a_k\cos(k\theta)+b_k\sin(k\theta),\, k\in\mathbb{Z}$. Cu valorile proprii $a_k=k^2$ astfel obținute, ecuația (1.5.28) se scrie:

$$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-k^2R(\rho)=0. \qquad (1.5.29)$$

Ecuația (1.5.29) este de tip Euler (ecuație diferențială liniară cu coeficienți variabili). Pentru integrarea ei se va efectua substituția $\rho=e^t$. Avem $R'(\rho)=e^{-t}\dfrac{dR}{dt},\, R''(\rho)=e^{-2t}\left(\dfrac{d^2R}{dt^2}-\dfrac{dR}{dt}\right)$. Înlocuind $R'(\rho)$ şi $R''(\rho)$ ecuația (1.5.29) se scrie sub forma:

$$\frac{d^2R}{dt^2}-k^2R=0,$$

care este o EDLO cu coeficienți constanți. Soluțiile ecuației caracteristice ataşate sunt $\lambda_{1,2}=\pm k$, iar soluția generală a EDLO este $R_k(t)=c_ke^{kt}+d_ke^{-kt}$. Prin urmare, soluția generală a ecuației (1.5.29) este

$$R_k(\rho)=c_k\rho^k+d_k\rho^{-k}. \qquad (1.5.30)$$

Întrucât $\rho^{-k}\to\infty$ $(k\in\mathbb{N})$ pentru $\rho\to 0$, se va impune condiția $d_k=0$ pentru ca soluția z a problemei lui Dirichlet să fie mărginită (avem $z\in C^2(\Omega)$). Deci $R_k(\rho)=c_k\rho^k$, iar soluțiile

EDDP din relația (1.5.25) sunt de forma $z_k(\rho,\theta) = R_k(\rho)T_k(\theta) = c_k\rho^k\left(a_k\cos(k\theta) + b_k\sin(k\theta)\right)$. Atunci soluția ecuației $\rho^2 z_{\rho\rho} + \rho z_\rho + z_{\theta\theta} = 0$ se va căuta sub forma seriei

$$z(\rho,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\left(a_k\cos(k\theta) + b_k\sin(k\theta)\right).$$

Coeficienții a_k, b_k se vor determina din condiția $z\big|_{\partial\Omega} = \frac{1}{4}\cos(4\theta)$. Ținând cont că în problema dată $\rho = 1$ avem

$$z(1,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(k\theta) + b_k\sin(k\theta)\right) = \frac{1}{4}\cos(4\theta),$$

iar această relație definește serie Fourier pentru funcția 2π periodică $\frac{1}{4}\cos(4\theta)$. Prin urmare coeficienții Fourier sunt

$$a_k = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos(4\theta)\cos(k\theta)d\theta,\quad b_k = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos(4\theta)\sin(k\theta)d\theta\,. \ \blacksquare$$

Remarca 1.5.8. Teorema 1.5.4 poate fi extinsă pentru problema variațională cu funcțională dependentă de o funcție de n variabile $u(x_1,...,x_n)$ de forma:

$$I[u] := \iint_{\Omega}\!...\!\int F(x_1,...,x_n,u,u_{x_1},...,u_{x_n})dx_1...dx_n \to extr,$$

$$u \in D := \left\{u:\Omega\to\mathbb{R} \mid \Omega\subset\mathbb{R}^n,\ u := u(x_1,...,x_n)\in C^2(\Omega),\ u\big|_{\partial\Omega} = f(x_1,...,x_n)\big|_{\partial\Omega}\right\}.$$

În acest caz EEO va avea forma:

$$F_u - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(F_{u_{x_i}}\right) = 0\,.$$

Remarca 1.5.9. Aplicând transformări de tipul celor utilizate la deducerea EEO, se poate extinde rezultatul teoremei 1.5.4 și la cazul în care integrandul funcționalei $I[z(x,y)]$, definită prin relația (1.5.13), depinde de derivate de ordin superior ale lui $z(x,y)$. De exemplu, pentru problema variațională:

$$I\left[z(x,y)\right] = \iint_{\Omega} F(x,y,z,z_x,z_y,z_{xx},z_{xy},z_{yy})dxdy \to extr,$$

$$z\in D := \left\{z:\Omega\to\mathbb{R} \mid z\in C^4(\Omega),\ z\big|_{\partial\Omega} = f\big|_{\partial\Omega},\ z_x\big|_{\partial\Omega} = f_x\big|_{\partial\Omega},\ z_y\big|_{\partial\Omega} = f_y\big|_{\partial\Omega}\right\},$$

unde funcția F este de clasă C^4, funcția ce realizează extremul local al funcționalei este soluție a ecuației:

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}\left(F_{z_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(F_{z_y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(F_{z_{xx}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(F_{z_{xy}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(F_{z_{yy}}\right) = 0\,, \tag{1.5.31}$$

unde derivatele parțiale $F_z, F_{z_x}, F_{z_y}, F_{z_{xx}}, F_{z_{xy}}, F_{z_{yy}}$ se calculează în punctul $\left(x,y,z^*,z_x^*,z_y^*,z_{xx}^*,z_{xy}^*,z_{yy}^*\right)$.

Într-adevăr, în cazul dat vom avea:

$$\varphi'(\alpha)\big|_{\alpha=0}=\iint\limits_{\Omega}\left\{F_z\delta z+F_{z_x}\left(\delta z\right)_x+F_{z_y}\left(\delta z\right)_y\right\}dxdy+\iint\limits_{\Omega}\left\{F_{z_{xx}}\left(\delta z\right)_{xx}+F_{z_{xy}}\left(\delta z\right)_{xy}+F_{z_{yy}}\left(\delta z\right)_{yy}\right\}dxdy=0\ .$$

Folosind FGR şi condiţia la frontieră $\delta z\big|_{\partial\Omega}\equiv 0$, mai sus s-a arătat că

$$\iint\limits_{\Omega}\left\{F_z\delta z+F_{z_x}\left(\delta z\right)_x+F_{z_y}\left(\delta z\right)_y\right\}dxdy=\iint\limits_{\Omega}\left\{F_z-\frac{\partial}{\partial x}\left(F_{z_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(F_{z_y}\right)\right\}\delta z\,dxdy\ .$$

Uşor se verifică că are loc relaţia:

$$T:=\iint\limits_{\Omega}\left\{F_{z_{xx}}\left(\delta z\right)_{xx}+F_{z_{xy}}\left(\delta z\right)_{xy}+F_{z_{yy}}\left(\delta z\right)_{yy}\right\}dxdy=T_1-T_2\ ,$$

unde

$$T_1=\iint\limits_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(F_{z_{xx}}\left(\delta z\right)_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(F_{z_{yy}}\left(\delta z\right)_y+F_{z_{xy}}\left(\delta z\right)_x\right)\right\}dxdy\ ,$$

$$T_2:=\iint\limits_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(F_{z_{xx}}\right)\left(\delta z\right)_x+\frac{\partial}{\partial y}\left(F_{z_{yy}}\right)\left(\delta z\right)_y+\frac{\partial}{\partial y}\left(F_{z_{xy}}\right)\left(\delta z\right)_x\right\}dxdy\ .$$

Folosind FGR şi condiţiile la frontieră $\left(\delta z\right)_x\big|_{\partial\Omega}=\left(\delta z\right)_y\big|_{\partial\Omega}\equiv 0$ se arată că $T_1=0$. Integrala T_2 admite o reprezentare analogică cu cea pentru T, iar utilizarea FGR şi a condiţiei $\delta z\big|_{\partial\Omega}\equiv 0$ conduce la relaţia

$$T_2:=-\iint\limits_{\Omega}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(F_{z_{xx}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(F_{z_{xy}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(F_{z_{yy}}\right)\right\}\delta z dxdy\ .$$

Astfel se obţine

$$\varphi'(\alpha)\big|_{\alpha=0}=\iint\limits_{\Omega}\left\{F_z-\frac{\partial}{\partial x}\left(F_{z_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(F_{z_y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(F_{z_{xx}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(F_{z_{xy}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(F_{z_{yy}}\right)\right\}\delta z\,dxdy=0\ ,$$

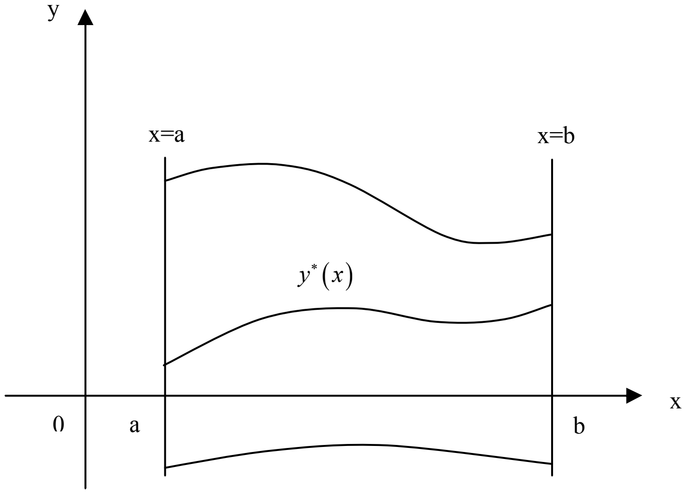
iar în baza lemei 1.2.6 rezultă că are loc relaţia (1.5.31).

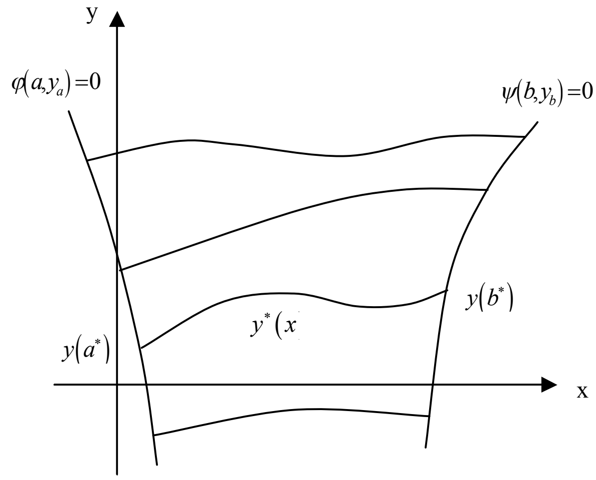
1.5.5. Extremităţi mobile. Condiţii naturale şi condiţii de transversalitate

Să considerăm următoarea problemă de CV:

$$\begin{gathered}I[y(x),a,b]=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx\to extr,\\(a,b)\in\Omega:=\left\{(c,d)\middle|\,c,d\in\mathbb{R},\ c<d,\ [c;d]\subset\Delta\subset\mathbb{R}\right\},\\\Delta-segment\ \ finit\ \ (fixat)\ al\ axei\ reale,\\perechea\ (a,b)\ (a,b-limitele\ de\ integrare)\ variază\ \ pe\ \ \Omega,\\y\in D:=\left\{y:\Delta\to\mathbb{R}\,|\ \ y\in C^1(\Delta),\ (a;y_a)\in\Gamma_1,\ (b;y_b)\in\Gamma_2\right\},\\y_a=y(a),\ y_b=y(b),\\\Gamma_1:=\left\{(a;y_a)\middle|\,a\in\Delta,\ y_a\in\mathbb{R},\ \varphi(a,y_a)=0\right\},\ \Gamma_2:=\left\{(b;y_b)\middle|\,b\in\Delta,\ y_b\in\mathbb{R},\ \psi(b,y_b)=0\right\},\end{gathered}\tag{1.5.32}$$

unde funcţia $F(x,y(x),y'(x))$ este de clasă C^2, iar $\varphi(x,y(x)),\psi(x,y(x))$ - de clasă C^1. MFA constă din funcţii ale căror grafice nu au fixate extremităţile $(a;y_a)$ şi $(b;y_b)$; acestea se pot deplasa prin punctele definite de curbele Γ_1 şi, respectiv, Γ_2 (a se vedea des. 1.5.3).





des. 1.5.2 des. 1.5.3

Se evidențiază următoarele două cazuri particulare:

- extremitățile curbelor admisibile se deplasează de-a lungul a două drepte verticale, descrise de ecuațiile $x=a$ şi, respectiv, $x=b$ (a se vedea des. 1.5.2);
- extremitățile curbelor admisibile se deplasează de-a lungul a două curbe, descrise de ecuațiile $y=\varphi(x)$ şi, respectiv, $y=\psi(x)$ ($x\in\Delta$) (a se vedea des. 1.5.3).

Remarca 1.5.10. În problema formulată se va determina nu numai funcția $y^*(x)$ ce realizează extremul funcționalei, ci şi valorile a^* şi b^* care asigură realizarea extremului menționat. ε - vecinătatea de ordinul I a tripletului $(y^*(x),a^*,b^*)$ este formată din triplete de forma $(y(x),a,b)$ ce satisfac condiția

$$\left\|y(x)-y^*(x)\right\|_{C^1(\Delta)}<\varepsilon,\ \left|a-a^*\right|<\varepsilon,\ \left|b-b^*\right|<\varepsilon\ .$$

Tripletul $(y^*(x),a^*,b^*)$ realizează un extrem local slab al funcționalei $I[y(x),a,b]$ dacă $I[y(x),a,b]\ge I[y^*(x),a^*,b^*]$ pe o ε - vecinătate de ordinul I.

Strategia de căutare a soluției problemei de CV formulate utilizează condiția necesară de extrem (teorema 1.2.4) al funcționalei. Fie tripletul $(y^*(x),a^*,b^*)$ realizează un extrem local slab al funcționalei $I[y(x),a,b]$ pe MFA D. Atunci curbele admisibile se definesc prin relația $Y(x):=y^*(x)+\alpha\delta y(x)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$ este un parametru real, iar $\delta y(x)\in H:=\left\{\delta y:\Delta\to\mathbb{R}\middle|\ \delta y(x)\in C^1(\Delta)\right\}$ ($\delta y(a),\delta y(b)\in\mathbb{R}$) - o variație fixată. Valorile admisibile ale limitelor de integrare sunt definite de formulele $a=a^*+\alpha\delta a,\ b=b^*+\alpha\delta b$.

Conform definiției G-diferențialei de ordinul I a funcționalei $I[y(x),a,b]$ avem $\delta I=\varphi'(\alpha)\big|_{\alpha=0}$, unde

$$\varphi(\alpha):=I[y^*(x)+\alpha\delta y(x),a^*+\alpha\delta a,b^*+\alpha\delta b]=\int\limits_{a^*+\alpha\delta a}^{b^*+\alpha\delta b}F(x,y^*(x)+\alpha\delta y(x),y^{*\prime}(x)+\alpha\delta y'(x))dx\ .$$

Utilizând formula de derivare a integralei în raport cu parametru, avem

$$\varphi'(\alpha)\Big|_{\alpha=0} = \left(F(x,Y,Y')\Big|_{x=b^*+\alpha\delta b}\delta b - F(x,Y,Y')\Big|_{x=a^*+\alpha\delta a}\delta a + \int_{a^*+\alpha\delta a}^{b^*+\alpha\delta b}\left\{\frac{\partial F}{\partial Y}\delta y(x) + \frac{\partial F}{\partial Y'}\delta y'(x)\right\}dx\right)\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= F(b^*, y^*(b^*), y^{*\prime}(b^*))\delta b - F(a^*, y^*(a^*), y^{*\prime}(a^*))\delta a + \int_{a^*}^{b^*}\left\{F_y\delta y(x) + F_{y'}\delta y'(x)\right\}dx\,,$$

iar apoi, integrând prin părți integrala $\int_{a^*}^{b^*} F_{y'}\delta y'(x)dx = F_{y'}\delta y(x)\Big|_{x=a^*}^{x=b^*} - \int_{a^*}^{b^*}\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)\delta y(x)dx$, conform teoremei 1.2.4, se obține:

$$\delta I = F(b^*, y^*(b^*), y^{*\prime}(b^*))\delta b - F(a^*, y^*(a^*), y^{*\prime}(a^*))\delta a + F_{y'}\delta y(x)\Big|_{x=a^*}^{x=b^*} + \int_{a^*}^{b^*}\left\{F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)\right\}\delta y(x)dx = 0\,. \quad (1.5.33)$$

Aici avem $F_y := F_y(x, y^*(x), y^{*\prime}(x)),\ F_{y'} := F_{y'}(x, y^*(x), y^{*\prime}(x)),\ y' = y^{*\prime}(x)$. Din relația (1.5.33) se vede, că variația δI a funcționalei $I[y(x),a,b]$ conține o integrală, ce determină variația funcționalei pentru valori fixate a^* şi b^*, şi în plus trei termeni, care depind de variațiile $\delta a, \delta b$ ale extremităților intervalului de integrare şi de variația $\delta y(x)$ pentru $a = a^*, b = b^*$. Deoarece tripletul $\left(y^*(x), a^*, b^*\right)$ realizează un extrem local slab al funcționalei $I[y(x),a,b]$, rezultă că $y^*(x)$ este extremală a funcționalei date pentru valorile fixate $a = a^*, b = b^*$ şi, ținând seama de relația $\delta I = 0$, rezultă:

1. $\int_{a^*}^{b^*}\left\{F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)\right\}\delta y(x)dx = 0$, adică extremala $y^*(x)$ a funcționalei $I[y(x),a,b]$ este soluție a EEL $F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0$.

2. $F(b^*, y^*(b^*), y^{*\prime}(b^*))\delta b - F(a^*, y^*(a^*), y^{*\prime}(a^*))\delta a + F_{y'}\delta y(x)\Big|_{x=a^*}^{x=b^*} = 0$.

De menționat că $\delta y(b^*)$ nu coincide cu δy_b, iar $\delta y(a^*)$ - cu δy_a. Ținând cont de aproximațiile $\delta y(b^*) \simeq \delta y_b - y'(b^*)\delta b$, $\delta y(a^*) \simeq \delta y_a - y'(a^*)\delta a$, relația de la punctul 2 se poate scrie sub forma:

$$F_{y'}\Big|_{x=b^*}\delta y_b + (F - y'F_{y'})\Big|_{x=b^*}\delta b - F_{y'}\Big|_{x=a^*}\delta y_a - (F - y'F_{y'})\Big|_{x=a^*}\delta a = 0\,. \quad (1.5.34)$$

Relația (1.5.33) se poate scrie sub forma:

$$\delta I = \int_{a^*}^{b^*}\left\{F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)\right\}\delta y(x)dx + F_{y'}\Big|_{x=b^*}\delta y_b + (F - y'F_{y'})\Big|_{x=b^*}\delta b - F_{y'}\Big|_{x=a^*}\delta y_a - (F - y'F_{y'})\Big|_{x=a^*}\delta a = 0\,.$$

În virtutea relațiilor $\varphi(a, y_a) = 0$ şi $\psi(b, y_b) = 0$, variațiile δy_a şi δa, precum şi δy_b şi δb, sunt reciproc dependente:

$$
\begin{aligned}
\delta\varphi &= \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{(a^*,y^*(a^*))}\delta a + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{(a^*,y^*(a^*))}\delta y_a = 0,\\
\delta\psi &= \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{(b^*,y^*(b^*))}\delta b + \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{(b^*,y^*(b^*))}\delta y_b = 0.
\end{aligned}
\tag{1.5.35}
$$

Însă variațiile $\delta y_a, \delta a$ şi $\delta y_b, \delta b$ sunt independente, prin urmare, egalitatea (1.5.34) este echivalentă cu

$$
\begin{aligned}
&\left.F_{y'}\right|_{x=a^*}\delta y_a + \left.(F - y'F_{y'})\right|_{x=a^*}\delta a = 0,\\
&\left.F_{y'}\right|_{x=b^*}\delta y_b + \left.(F - y'F_{y'})\right|_{x=b^*}\delta b = 0.
\end{aligned}
\tag{1.5.36}
$$

Relațiile (1.5.35) şi (1.5.36) sunt numite *condiții de transversalitate* ale extremalelor şi curbelor Γ_1 şi Γ_2. Rezultatele descrise mai sus pot fi formulate sub forma:

Teorema 1.5.5. *Dacă funcția $y^*(x) \in C^1(\Delta)$ ce satisface condițiile $y^*(a) = y_a$, $y^*(b) = y_b$, $\varphi(a, y_a) = 0$ şi $\psi(b, y_b) = 0$ realizează un extrem local slab al funcționalei din problema (1.5.32), atunci $y^*(x)$ satisface EEL şi condițiile de transversalitate (1.5.35) şi (1.5.36).*

Remarca 1.5.11.

1. Dacă una dintre extremitățile curbelor admisibile este fixată, atunci condițiile de transversalitate pentru această extremitate nu se scriu, deoarece, în acest caz, variațiile corespunzătoare în relațiile (1.5.35) şi (1.5.36) sunt nule.
2. Dacă se analizează problema în care extremitățile curbelor aparțin dreptelor verticale $x = a$ şi $x = b$, atunci, întrucât a şi b sunt definite, avem $\delta a = 0, \delta b = 0$. În acest caz condițiile de transversalitate iau forma (*condiții naturale*)
$$
\left.F_{y'}(x, y^*(x), y^{*\prime}(x))\right|_{x=a^*} = 0,\ \left.F_{y'}(x, y^*(x), y^{*\prime}(x))\right|_{x=b^*} = 0\,. \tag{1.5.37}
$$
Deoarece ecuațiile dreptelor pot fi scrise sub forma $\varphi(a) = a - a^* = 0, \psi(b) = b - b^* = 0$, rezultă că se satisfac condițiile (1.5.35).
3. Dacă extremitățile curbelor admisibile aparțin curbelor definite de ecuațiile $y = \varphi(x)$ şi, respectiv, $y = \psi(x)$, atunci condițiile $\varphi(a, y_a) = 0$ şi $\psi(b, y_b) = 0$ pot fi scrise sub forma $\varphi(a, y_a) = y_a - \varphi(a) = 0$, $\psi(b, y_b) = y_b - \psi(b) = 0$. În baza condițiilor (1.5.35) se obține
$$
-\varphi'(a^*)\delta a + 1\cdot\delta y_a = 0,\ -\psi'(b^*)\delta b + 1\cdot\delta y_b = 0\,,
$$
de unde avem $\delta y_a = \varphi'(a^*)\delta a,\ \delta y_b = \psi'(b^*)\delta b$. Prin urmare, luând în seamă relația (1.5.36) rezultă
$$
\begin{aligned}
&\left.(F + (\varphi' - y')F_{y'})\right|_{x=a^*}\delta a = 0,\\
&\left.(F + (\psi' - y')F_{y'})\right|_{x=b^*}\delta b = 0.
\end{aligned}
$$

În virtutea faptului că variațiile δa şi δb sunt arbitrare, se obțin condițiile de transversalitate:

$$\begin{aligned}&\left(F(x,y^*(x),y^{*\prime}(x))+(\varphi'(x)-y^{*\prime}(x))F_{y'}(x,y^*(x),y^{*\prime}(x))\right)\Big|_{x=a^*}=0,\\&\left(F(x,y^*(x),y^{*\prime}(x))+(\psi'(x)-y^{*\prime}(x))F_{y'}(x,y^*(x),y^{*\prime}(x))\right)\Big|_{x=b^*}=0.\end{aligned}\tag{1.5.38}$$

Dacă curbele de-a lungul cărora alunecă extremitățile curbelor admisibile sunt definite sub forma

$$y=y_a=\varphi(x)=const,\quad y=y_b=\psi(x)=const\ ,$$

atunci $\varphi'(x)=\psi'(x)\equiv 0$, iar condițiile (1.5.38) se simplifică

$$(F-y'F_{y'})\big|_{x=a^*}=0,\ (F-y'F_{y'})\big|_{x=b^*}=0\ .\tag{1.5.39}$$

4. Dacă condițiile $\varphi(a,y_a)=0,\psi(b,y_b)=0$ sunt scrise sub forma $y(a)=y_a,\ y(b)=y_b$, adică este cercetată problema cu extremitățile fixate, atunci, întrucât avem $\delta a=\delta b=\delta y_a=\delta y_b=0$, au loc condițiile de transversalitate (1.5.36), iar constantele arbitrare în soluția generală a EEL se determină de condițiile la extremități.

Algoritm de aflare a extremalelor admisibile ale funcționalei definite în problema (1.5.32):

α) se scrie EEL:

$$F_{y_i^*}\left(x,y^*(x),y^{*\prime}(x)\right)-\frac{d}{dx}\left(F_{y_i^{*\prime}}\left(x,y^*(x),y^{*\prime}(x)\right)\right)=0,\ x\in[a;b]\ ;$$

β) se află soluția generală $y=y(x,c_1,c_2)$ a EEL;

γ) se scriu condițiile de transversalitate (folosind în funcție de caz formulele (1.5.35), (1.5.36) (1.5.37), (1.5.38)) şi condițiile la extremități $\varphi(a,y_a)=0,\psi(b,y_b)=0$ ($y_a=y(a),\ y_b=y(b)$).

δ) se determină coeficienții c_1,c_2,a^*,b^* şi se scrie ecuația extremalei $y^*(x)$.

Exemplul 1.5.5. *Să se afle extremalele funcționalei* $I[y(x)]=\int\limits_0^{\pi/4}\left(y'^2(x)-y^2(x)+4y(x)\cos x\right)dx$,

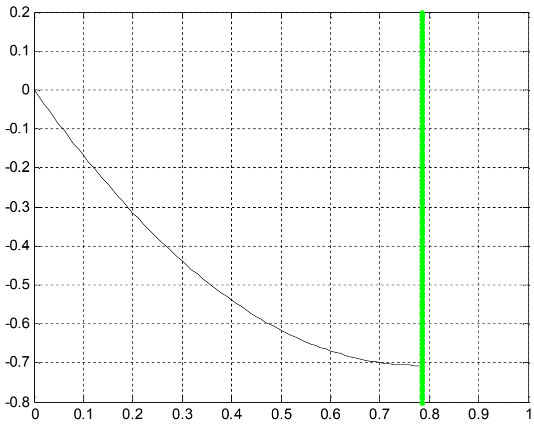


fig. 1.5.4

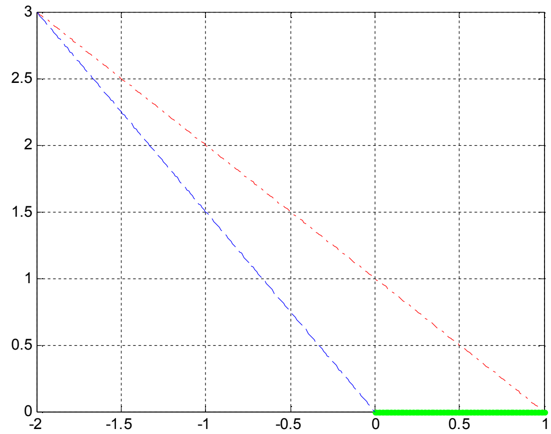
$y\in D:=\left\{y\in C^1\left[0;\pi/4\right]\big|\,y(0)=0\right\}$.

Extremitatea de stânga este fixată în punctul $A(0;0)$ (condițiile de transversalitate pentru această extremitate nu se scriu), iar extremitatea de dreapta - mobilă, aparține dreptei verticale $x=\pi/4$ (a se vedea fig. 1.5.4). Soluția generală a EEL $y''+y=2\cos x$ (EDLN cu coeficienți constanți) este $y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+x\sin x$, iar condiția la extremitatea de stânga $y(0)=0$ implică $c_1=0$. Condițiile de transversalitate în extremitatea mobilă iau forma $F_{y'}\big|_{x=b^*}=0$, de unde rezultă

$$y'(x)\big|_{x=\pi/4}=0 \Leftrightarrow \left(-c_1\sin x+c_2\cos x+\sin x+x\cos x\right)\big|_{x=\pi/4}=0 \Leftrightarrow c_2=c_1-1-\pi/4=-1-\pi/4 .$$

Astfel se obține extremala admisibilă $y^*(x)=\left(x-1-\pi/4\right)\sin x$. ■

Exemplul 1.5.6. *Să se afle curba extremală a funcționalei* $I[y(x)]=\int_0^b y'^3(x)dx$ *dacă extremitatea de stânga a acestei curbe este fixată în punctul* $A(0;0)$, *iar extremitatea de dreapta aparține dreptei* $y(x)=1-x$.



Întrucât integrandul $F=y'^3$ nu depinde explicit de x şi y, soluția generală a EEL este $y(x)=c_1x+c_2$ (a se vedea secțiunea 1.3.2). Deoarece extremitatea de dreapta aparține curbei de ecuație $y=\psi(x)=1-x$, se va utiliza condiția de transversalitate (1.5.38). Relația $F+(\psi'-y')F_{y'}\big|_{x=b}=y'^3-3(1+y')y'^2\big|_{x=b}=-y'^2(2y'+3)\big|_{x=b}=0$ implică $y'(b)=0,\ y'(b)=-3/2$. Datele inițiale conduc la condițiile $y(0)=0,\ y(b)=1-b$. În continuare se vor determina coeficienții c_1,c_2,b^* rezolvând sistemele

$$y(0)=c_2=0, y'(b)=c_1=0,\ y(b)=c_1b+c_2=1-b \text{ şi } y(0)=c_2=0, y'(b)=c_1=-3/2, y(b)=c_1b+c_2=1-b .$$

Soluția primului sistem este $c_1=c_2=0,\ b^*=1$, iar al celui de-al doilea – $c_1=-3/2,\ c_2=0,\ b^*=-2$. Au fost găsite două extremale admisibile $y^*(x)\equiv 0$ şi $y^*(x)=-3x/2$. ■

Exemplul 1.5.7. *Să se afle curba extremală a funcționalei* $I[y(x)]=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}dx$, *dacă extremitatea de stânga a acestei curbe aparține parabolei* $y(x)=\varphi(x)=x^2+2$, *iar extremitatea de dreapta - dreptei* $y(x)=\psi(x)=x$.

Întrucât integrandul $F=\sqrt{1+y'^2(x)}$ nu depinde explicit de x şi y, soluția generală a EEL este $y(x)=c_1x+c_2$. Condițiile de transversalitate (1.5.38) sunt

$$\begin{aligned}\left(F+(\varphi'-y')F_{y'}\right)\big|_{x=a}&=\left(\sqrt{1+y'^2(x)}+(2x-y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2(x)}}\right)\Bigg|_{x=a}=0,\\ \left(F+(\psi'-y')F_{y'}\right)\big|_{x=b}&=\left(\sqrt{1+y'^2(x)}+(1-y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2(x)}}\right)\Bigg|_{x=b}=0,\end{aligned}\tag{1.5.40}$$

iar condițiile la extremități

$$\begin{aligned}y(a)&=c_1a+c_2=\varphi(a)=a^2+2,\\ y(b)&=c_1b+c_2=\psi(b)=b.\end{aligned}\tag{1.5.41}$$

Coeficienții c_1, c_2, a^*, b^* se află ținând cont de condițiile (1.5.40) – (1.5.41). Avem

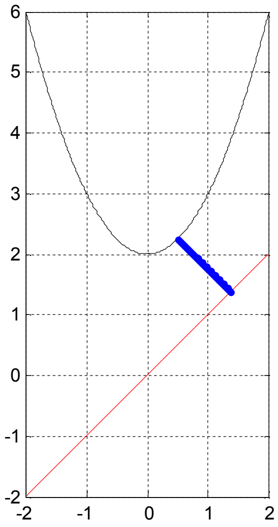


fig. 1.5.5

$$1 + 2a\,y'(a) = 1 + 2ac_1 = 0,$$
$$1 + y'(b) = 1 + c_1 = 0,$$

$$c_1 a + c_2 = a^2 + 2,$$
$$c_1 b + c_2 = b,$$

de unde se află $c_1 = -1,\ a^* = 1/2,\ c_2 = 11/4,\ b^* = 11/8$. Se obține extremala admisibilă $y^*(x) = -x + 11/4$. Această dreaptă reprezintă curba netedă de lungime minimă ce conectează parabola $\varphi(x) = x^2 + 2$ și dreapta $\psi(x) = x$ (a se vedea figura 1.5.5). Distanța este $I[y^*(x)] = \int\limits_{1/2}^{11/8} \sqrt{1 + (-1)^2}\,dx = 7\sqrt{2}/8$. ■

Exemplul 1.5.8. *Să se afle curba extremală a funcționalei* $I[y(x)] = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx$ *dacă extremitatea de stânga a acestei curbe aparține cercului, definit prin ecuația* $x^2 + y^2(x) = 1$, *iar extremitatea de dreapta - cercului* $(x - 10)^2 + y^2(x) = 4$.

Întrucât integrandul $F = \sqrt{1 + y'^2(x)}$ nu depinde explicit de x și y, soluția generală a EEL este $y(x) = c_1 x + c_2$. Deoarece condițiile la extremități sunt de forma $\varphi(a, y_a) = a^2 + {y_a}^2 - 1 = 0$, $\psi(b, y_b) = (b - 10)^2 + {y_b}^2 - 4 = 0$, condițiile de transversalitate se vor considera sub forma (1.5.35) - (1.5.36):

$$2a^*\delta a + 2y_a \delta y_a = 0,\ 2(b^* - 10)\delta b + 2y_b \delta y_b = 0, \tag{1.5.42}$$

$$\left.\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'^2(x)}}\right|_{x=a^*} \cdot \delta y_a + \left.\left(\sqrt{1 + y'^2(x)} - \frac{y'^2(x)}{\sqrt{1 + y'^2(x)}}\right)\right|_{x=a^*} \cdot \delta a = 0,$$
$$\left.\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'^2(x)}}\right|_{x=b^*} \cdot \delta y_b + \left.\left(\sqrt{1 + y'^2(x)} - \frac{y'^2(x)}{\sqrt{1 + y'^2(x)}}\right)\right|_{x=b^*} \cdot \delta b = 0, \tag{1.5.43}$$

la care alăturăm condițiile pe frontieră

$$a^{*2} + {y_a}^2 - 1 = 0,\ (b^* - 10)^2 + {y_b}^2 - 4 = 0. \tag{1.5.44}$$

Relațiile (1.5.43) pot fi scrise ca $c_1 \delta y_a + \delta a = 0,\ c_1 \delta y_b + \delta b = 0$, iar în baza acestora (1.5.42) se reprezintă astfel:

$$\left(-c_1 a^* + y_a\right)\delta y_a = 0,\ \left(-c_1(b^* - 10) + y_b\right)\delta y_b = 0.$$

Întrucât în ultimele egalități δy_a și δy_b sunt arbitrare, se obține $y_a = c_1 a^*,\ y_b = c_1(b^* - 10)$, iar atunci, ținând cont că $y_a = y(a^*) = c_1 a^* + c_2,\ y_b = y(b^*) = c_1 b^* + c_2$, se deduc egalitățile $c_1 = c_2 = 0,\ y^*(x) \equiv 0$, iar relațiile (1.5.44) implică $a^* = \pm 1, b^* = 10 \pm 2$.

Distanța minimă dintre punctele cercurilor considerate este atinsă pe dreapta $y^*(x)\equiv 0,\ a^*=1,\ b^*=8$, iar distanța maximă – pe dreapta $y^*(x)\equiv 0,\ a^*=-1,\ b^*=12$ (a se vedea fig.1.5.6).

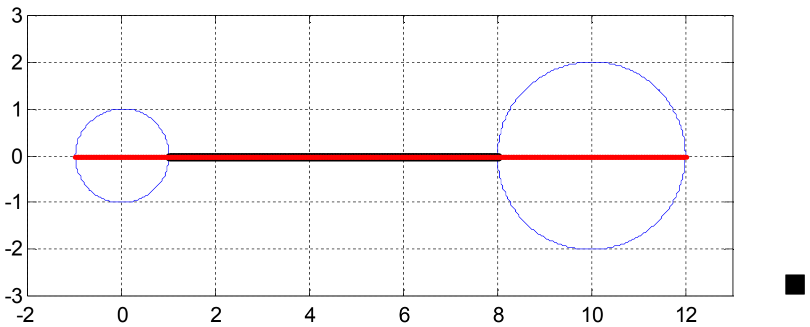


fig. 1.5.6

În mod asemănător se analizează şi problema cu extremități mobile în care integrandul F depinde de mai multe funcții necunoscute:

$$
\begin{gathered}
I[\overline{y}(x),a,b]=\int_a^b F(x,\overline{y}(x),\overline{y}'(x))dx\to extr,\\
(a,b)\in\Omega:=\left\{(c,d)\middle|\, c,d\in\mathbb{R},\ c<d,\ [c;d]\subset\Delta\subset\mathbb{R}\right\},\\
\Delta-segment\ \ finit\ (fixat)\ al\ axei\ reale,\\
perechea\ (a,b)\ (a,b-limitele\ de\ integrare)\ variaz\breve{a}\ pe\ \Omega,\\
\overline{y}(x)\in D:=\left\{\overline{y}:\Delta\to\mathbb{R}^n\mid \overline{y}(x)=(y_1(x),...,y_n(x)),\ y_i(x)\in C^1(\Delta), i=\overline{1,n},\ \varphi_j(a;\overline{y}^a)=0, \psi_k(b;\overline{y}^b)=0,\right.\\
\left. j=\overline{1,m},\ k=\overline{1,p},\ m,p\le n+1,\ \overline{y}^a=\overline{y}(a),\ \overline{y}^b=\overline{y}(b)\right\},
\end{gathered}
\tag{1.5.45}
$$

unde funcția $F(x,\overline{y}(x),\overline{y}'(x))$ este de clasă C^2, iar $\varphi_j(x,\overline{y}(x)),\psi_k(x,\overline{y}(x))$ - de clasă C^1. Dacă tripletul $(\overline{y}^*(x),a^*,b^*)$ realizează un extrem local slab al funcționalei $I[\overline{y}(x),a,b]$, atunci vector – funcția $\overline{y}^*(x)$ reprezintă o extremală a funcționalei date pentru valorile fixate $a=a^*$ şi $b=b^*$. Prin urmare, are loc relația:

$$
\int_{a^*}^{b^*}\sum_{i=1}^{n}\left\{F_{y_i}-\frac{d}{dx}\left(F_{y_i'}\right)\right\}\delta y_i(x)dx=0,\ \forall\delta y_i(x)\in H:=\left\{\delta y:\Delta\to\mathbb{R}\middle|\ \delta y(x)\in C^1(\Delta)\right\}. \tag{1.5.46}
$$

Ultima relație, în particular are loc şi pentru $\delta y_i(x)\in H$ astfel încât $\delta y_i(a)=\delta y_i(b)=0$. Ținând cont că sistemul de funcții $\delta y_i(x),\ i=\overline{1,n}$, este liniar independent, rezultă

$$
\int_{a^*}^{b^*}\left(F_{y_i}-\frac{d}{dx}\left(F_{y_i'}\right)\right)\delta y_i(x)dx=0,\ i=\overline{1,n},
$$

şi, întrucât $\overline{y}^*(x)$ este extremală, se satisface sistemul EEL:

$$
F_{y_i}-\frac{d}{dx}\left(F_{y_i'}\right)=0,\ i=\overline{1,n}.
$$

Conform condiției necesare de extrem al funcționalei $I[\overline{y}(x),a,b]$, pentru variația de ordinul I vom avea:

$$\delta I=\sum_{i=1}^{n}\delta_i I=\int_{a^*}^{b^*}\sum_{i=1}^{n}\left\{F_{y_i}-\frac{d}{dx}\left(F_{y_i'}\right)\right\}\delta y_i(x)dx+\sum_{i=1}^{n}F_{y_i'}\Big|_{x=b^*}\delta y_i^b+$$
$$+\left(F-\sum_{i=1}^{n}y_i'F_{y_i'}\right)\Bigg|_{x=b^*}\cdot\delta b-\sum_{i=1}^{n}F_{y_i'}\Big|_{x=a^*}\delta y_i^a-\left(F-\sum_{i=1}^{n}y_i'F_{y_i'}\right)\Bigg|_{x=a^*}\delta a=0,$$

de unde, în virtutea relației (1.5.46), rezultă

$$\sum_{i=1}^{n}F_{y_i'}\Big|_{x=b^*}\delta y_i^b+\left(F-\sum_{i=1}^{n}y_i'F_{y_i'}\right)\Bigg|_{x=b^*}\cdot\delta b-\sum_{i=1}^{n}F_{y_i'}\Big|_{x=a^*}\delta y_i^a-\left(F-\sum_{i=1}^{n}y_i'F_{y_i'}\right)\Bigg|_{x=a^*}\cdot\delta a=0. \quad (1.5.47)$$

În virtutea relațiilor $\varphi_j(a;\overline{y}^a)=0,\psi_k(b;\overline{y}^b)=0,\ j=\overline{1,m},\ k=\overline{1,p}$, variațiile δy_i^a şi δa, precum şi δy_i^b şi δb, sunt reciproc dependente:

$$\begin{aligned}\delta\varphi_j&=\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\Bigg|_{(a^*,\overline{y}^*(a^*))}\delta a+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y_i}\Bigg|_{(a^*,\overline{y}^*(a^*))}\delta y_i^a=0,\ j=\overline{1,m},\\ \delta\psi_k&=\frac{\partial\psi_k}{\partial x}\Bigg|_{(b^*,\overline{y}^*(b^*))}\delta b+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi_k}{\partial y_i}\Bigg|_{(b^*,\overline{y}^*(b^*))}\delta y_i^b=0,\ k=\overline{1,p}.\end{aligned}\quad (1.5.48)$$

Însă variațiile $\delta y_i^a,\delta a$ şi $\delta y_i^b,\delta b$ sunt independente (în virtutea relației (1.5.48)), prin urmare, egalitatea (1.5.47) este echivalentă cu

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}F_{y_i'}\Big|_{x=a^*}\delta y_i^a+\left(F-\sum_{i=1}^{n}y_i'F_{y_i'}\right)\Bigg|_{x=a^*}\cdot\delta a=0,\\ &\sum_{i=1}^{n}F_{y_i'}\Big|_{x=b^*}\delta y_i^b+\left(F-\sum_{i=1}^{n}y_i'F_{y_i'}\right)\Bigg|_{x=b^*}\cdot\delta b=0.\end{aligned}\quad (1.5.49)$$

Rezultatele formulate mai sus pot fi scrise sub forma:

Teorema 1.5.6. *Dacă vector-funcția* $\overline{y}^*(x)=(y_1^*(x),...,y_n^*(x)),\ y_i^*(x)\in C^1(\Delta),\ i=\overline{1,n}$, *ce satisface condițiile* $\varphi_j(a;\overline{y}^a)=0,\psi_k(b;\overline{y}^b)=0,\ j=\overline{1,m},\ k=\overline{1,p},\ m,p\le n+1,\ \overline{y}^a=\overline{y}^*(a),\ \overline{y}^b=\overline{y}^*(b)$, *realizează un extrem local slab al funcționalei din problema (1.5.45), atunci* $\overline{y}^*(x)$ *satisface sistemul EEL şi condițiile de transversalitate (1.5.48) şi (1.5.49).*

Remarca 1.5.12. Au loc următoarele analoage ale relațiilor (1.5.37) şi (1.5.38):

$$F_{y_i'}\Big|_{x=a^*}=F_{y_i'}\Big|_{x=b^*}=0,\ i=\overline{1,n}, \quad (1.5.50)$$

$$\begin{aligned}&\left(F+\sum_{i=1}^{n}(\varphi_i'-y_i')F_{y_i'}\right)\Bigg|_{x=a^*}=0,\\ &\left(F+\sum_{i=1}^{n}(\psi_i'-y_i')F_{y_i'}\right)\Bigg|_{x=b^*}=0.\ \blacksquare\end{aligned}\quad (1.5.51)$$

Exemplul 1.5.9. *Să se afle extremalele admisibile ale funcționalei*

$$I[y_1(x),y_2(x)]=\int_0^1\left(y_1'(x)y_2'(x)+6xy_1(x)+12xy_2(x)\right)dx,$$

$$\overline{y}\in D:=\left\{\overline{y}=(y_1,y_2)\,\middle|\,y_1,y_2\in C^1[0;1],y_1(0)=y_2(0)=0,\ y_1(1)+y_2(1)=4\right\}.$$

Sistemul EEL este:

$$F_{y_1}-\frac{d}{dx}\left(F_{y_1'}\right)=6x-y_2''=0,$$
$$F_{y_2}-\frac{d}{dx}\left(F_{y_2'}\right)=12x-y_1''=0.$$

Integrând de două ori fiecare ecuație se obține soluția generală:

$$y_1(x)=2x^3+c_1x+c_2,\ y_2(x)=x^3+c_3x+c_4.$$

Întrucât extremitatea de stânga a vector-funcțiilor admisibile este fixată, se vor scrie condițiile de transversalitate doar în extremitatea de dreapta şi se va utiliza relația (1.5.49) pentru aceasta. Deoarece $b=1$ avem $\delta b=0$, iar relația (1.5.49) ia forma $\left(F_{y_1'}\delta y_1^b+F_{y_2'}\delta y_2^b\right)\Big|_{x=b^*=1}=0$, adică

$$y_2'(b^*)\delta y_1^b+y_1'(b^*)\delta y_2^b=0. \qquad (1.5.52)$$

Dacă se scrie condiția pe frontiera de dreapta sub forma $\psi_1(b,y_1^b,y_2^b)=y_1^b+y_2^b-4=0$, în relația (1.5.49) avem:

$$1\cdot\delta y_1^b+1\cdot\delta y_2^b=0.$$

Atunci $\delta y_1^b=-\delta y_2^b$ şi relația (1.5.52) se transformă în $\left(-y_2'(b^*)+y_1'(b^*)\right)\delta y_2^b=0$. Întrucât variația δy_2^b este arbitrară, rezultă că

$$y_1'(b^*)=y_2'(b^*). \qquad (1.5.53)$$

Utilizând condițiile pe frontieră şi soluția generală a sistemului EEL se obține:

$$y_1(0)=c_2=0,\ y_2(0)=c_4=0,\ y_1(b^*)+y_2(b^*)=y_1(1)+y_2(1)=2+c_1+1+c_3=4.$$

Condițiile (1.5.53) implică $y_1'(b^*)=y_1'(1)=6+c_1=y_2'(b^*)=y_2'(1)=3+c_3$, sau $c_3-c_1=3$. Rezolvând sistemul

$$\begin{cases}-c_1+c_3=3,\\ c_1+c_3=1,\end{cases}$$

se găseşte $c_1=-1, c_3=2$.

Se obține extremala admisibilă $\overline{y}^*(x)=\left(y_1^*(x),y_2^*(x)\right)=\left(2x^3-x,x^3+2x\right)$. ■

Exemplul 1.5.10. *Să se afle extremalele admisibile ale funcționalei*

$$I[y_1(x),y_2(x)]=\int_0^b y_1'(x)y_2'(x)dx$$
$$\overline{y}\in D:=\left\{\overline{y}=(y_1,y_2)\,\middle|\,y_1,y_2\in C^1[0;1],y_1(0)=-3,\ y_2(0)=2,\ y_1(b)=b^2+1,\ y_2(b)=-2\right\}.$$

Sistemul EEL este:

$$F_{y_1}-\frac{d}{dx}\left(F_{y_1'}\right)=-y_2''=0,$$
$$F_{y_2}-\frac{d}{dx}\left(F_{y_2'}\right)=-y_1''=0.$$

Soluția generală a acestuia este $y_1(x)=c_1x+c_2,\ y_2(x)=c_3x+c_4$. Întrucât extremitatea de stânga a vector-funcțiilor admisibile este fixată, se scriu condițiile de transversalitate doar în extremitatea de dreapta şi se utilizează relația (1.5.51). Scriind mai întâi condițiile pe frontiera de dreapta sub forma $y_1 = \psi_1(x) = x^2 + 1,\ y_2 = \psi_2(x) = -2$, avem:

$$\left(F + (2x - y_1')F_{y_1'} - y_2' F_{y_2'}\right)\Big|_{x=b^*} = \left(y_1' y_2' + (2x - y_1')y_2' - y_2' y_1'\right)\Big|_{x=b^*} = (2b^* - c_1)c_3 = 0\,,$$

adică sunt două variante $c_3 = 0$ sau $c_1 = 2b^*$. Utilizând condițiile pe frontieră şi soluția generală a sistemului EEL se obține:

$$y_1(0) = c_2 = -3,\ y_2(0) = c_4 = 2,\ y_1(b^*) = c_1 b^* + c_2 = b^{*2} + 1,\ y_2(b^*) = c_3 b^* + c_4 = -2\,. \tag{1.5.54}$$

În cazul în care se admite că $c_3 = 0$, sistemul (1.5.54) nu are soluție. Dacă însă $c_1 = 2b^*$, avem următoarea soluție a sistemului:

$$b^* = \pm 2,\ c_1 = \pm 4,\ c_2 = -3,\ c_3 = \mp 2,\ c_4 = 2\,.$$

Se obțin două extremale admisibile $\overline{y}^*(x) = \left(y_1^*(x), y_2^*(x)\right)$:

$$y_1^*(x) = 4x - 3,\ y_2^*(x) = -2x + 2,\ b^* = 2$$

şi $y_1^*(x) = -4x - 3,\ y_2^*(x) = 2x + 2,\ b^* = -2$. ■