1.6. Probleme variaţionale de extrem condiţionat

Soluțiile problemelor variaționale examinate la secțiunile precedente satisfăceau anumite condiții pe frontiera domeniului de integrare (condiții la limită). Cu toate acestea, în multe aplicații importante ale CV funcțiile admisibile satisfac careva condiții suplimentare. În acest sens vom aminti problema lui Dido. Funcția ce reprezintă soluția acesteia va satisface nu numai condițiile la extremități, dar şi o condiție suplimentară: lungimea graficului funcției ia valoarea fixă l. În această secțiune se vor analiza probleme de CV de acest tip, numite *probleme variaționale de extrem condiționat (PVEC).*

Probleme de extrem condiționat se întâlnesc şi în optimizarea finit-dimensională, atunci când argumentele funcției de mai multe variabile sunt legate între ele prin careva relații funcționale. Pentru rezolvarea acestor probleme, de regulă, se utilizează metoda multiplicatorilor lui Lagrange (MML) [ ]. Această metodă universală, bazată pe introducerea multiplicatorilor lui Lagrange şi construcția funcției lui Lagrange, poate fi extinsă şi pentru cazul funcționalelor. În acest sens rezultatele din teoremele 1.6.1-1.6.3, ce vor fi demonstrate în continuare, reprezintă generalizări ale metodei MML la cazul problemelor de optimizare infinit-dimensională. Conform metodei MML rezolvarea problemei variaționale de extrem condiționat se va reduce la rezolvarea unei probleme variaționale de extrem necondiționat asociate (probleme ce au fost examinate în secțiunile precedente).

1.6.1. Problema cu restricţii de tip algebric

Să considerăm problema de CV:

$$I\left[\bar{y}(x)\right] = \int_a^b F(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x))dx \to extr, \tag{1.6.1}$$

$$\bar{y} \in D := \left\{ \bar{y} \in C^1\left([a;b];\mathbb{R}^n\right) \middle| \ \bar{y}(a) = \bar{y}_a,\ \bar{y}(b) = \bar{y}_b \right\} \tag{1.6.2}$$

$$\varphi_j(x,\bar{y}(x)) = 0,\ j = \overline{1,k}\ \ (k < n),\ \ x \in [a;b], \tag{1.6.3}$$

unde $\bar{y}_a, \bar{y}_b \in \mathbb{R}^n$ sunt vectori definiți, $\bar{y}(x) = (y_1(x),...,y_n(x)),\ \bar{y}'(x) = \left(y_1'(x),...,y_n'(x)\right)$, funcția de $2n+1$ variabile $F(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x))$ este de clasă C^2, iar $\varphi_j(x,\bar{y}(x))$ $(j = \overline{1,k})$ sunt de clasă C^1. Se va considera că condițiile la extremități nu sunt în contradicție cu restricțiile suplimentare $\varphi_j(x,\bar{y}(x))=0,\ j=\overline{1,k}$, ceea ce înseamnă că $\varphi_j(a,\bar{y}_a)=\varphi_j(b,\bar{y}_b)=0,\ j=\overline{1,k}$. Restricțiile suplimentare sunt numite restricții de tip algebric (legături olonome, restricții de fază). Extremalele funcționalei $I[\bar{y}(x)]$ sunt vector-funcții $\bar{y}^*(x)=\left(y_1^*(x),...,y_n^*(x)\right)^T$.

Fie rangul matricei lui Jacobi în raport cu variabilele $\bar{y}$ (după înlocuirea componentelor $y_i^*(x),\ i=\overline{1,n}$ în locul funcțiilor $y_i(x),\ i=\overline{1,n}$)

$$\frac{\partial(\varphi_1,...,\varphi_k)}{\partial(y_1,...,y_n)}=\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_k}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

este maximal, adică

$$\det\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial y_i}\right)_{i,j=1}^{k}\neq 0. \tag{1.6.4}$$

Rezultatul ce conține condițiile necesare de ordinul I de extrem al funcționalei $I[\bar{y}(x)]$ în problema (1.6.1)-(1.6.3) este dat de:

Teorema 1.6.1. *Fie mulțimea D definită prin relația (1.6.2), funcția $F(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x))$ de clasă C^2, iar $\varphi_j(x,\bar{y}(x))$ $\left(j=\overline{1,k}\right)$ de clasă C^1. Dacă vector-funcția $\bar{y}^*(x)=\left(y_1^*(x),...,y_n^*(x)\right)^T\in D$ ce satisface condițiile (1.6.3) realizează un extrem local al funcționalei $I[\bar{y}(x)]$ din problema (1.6.1) şi se verifică relația (1.6.4), atunci există funcțiile $\lambda_i\in C[a;b],\ i=\overline{1,n}$, astfel încât $\bar{y}^*(x)$ reprezintă o extremală admisibilă a funcționalei*

$$I^*[\bar{y}(x)]:=\int_a^b\left\{F(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x))+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(x)\varphi_j(x,\bar{y}(x))\right\}dx. \tag{1.6.5}$$

pe mulțimea funcțiilor admisibile D.

Demonstrație. Se consideră familiile de funcții $Y_i:=Y_i(x,\alpha)=y_i^*(x)+\alpha\delta y_i(x),\ i=\overline{1,n}$, unde $\delta y_i\in H:=\left\{\delta y\in C^1[a;b]\,\middle|\,\delta y(a)=\delta y(b)=0\right\}$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ sunt funcții fixate, iar $\alpha\in\mathbb{R}$ e suficient de mic în modul. Prin înlocuirea funcțiilor Y_i în relațiile (1.6.2) şi (1.6.3) în locul funcțiilor y_i, problema inițială se reduce la o problemă de aflare a extremelor funcției de o variabilă reală

$$I(\alpha):=\int_a^b F\left(x,Y_1,...,Y_n,Y_1',...,Y_n'\right)dx\to extr,$$

în condițiile $g_j(\alpha)=0,\ j=\overline{1,k}$, unde $g_j(\alpha):=\varphi_j(x,Y_1,...,Y_n)$ $\left(j=\overline{1,k}\right)$. Evident că funcția $I(\alpha)$ admite un extrem pentru $\alpha=0$, deci $I'(0)=0$. Conform relației (1.5.3) (a se vedea secțiunea 1.5.1) avem $I'(0)=\int_a^b \{F_{y_i}\delta y_i + F_{y_i'}\delta y_i'\}dx = 0,\ i=\overline{1,n}$, iar

$$g_j'(0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y_i}\delta y_i = 0,\ j=\overline{1,k}. \qquad (1.6.6)$$

Înmulțind ecuația cu numărul j $\left(j=\overline{1,k}\right)$ a relației (1.6.6) la funcția arbitrară $\lambda_j \in C[a;b]$ şi integrând în limitele de la a la b se obține:

$$\int_a^b \lambda_j \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y_i}\delta y_i dx = 0,\ j=\overline{1,k}.$$

După însumarea ultimelor relații la integrala $I'(0)$ avem:

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{n}\left\{\left(F_{y_i} + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial y_i}\right)\delta y_i + F_{y_i'}\delta y_i'\right\}dx = 0 \qquad (1.6.7)$$

După integrarea prin părți $\int_a^b F_{y_i'}\delta y_i' dx = -\int_a^b \frac{d}{dx}\left(F_{y_i'}\right)\delta y_i dx$ $\left(\delta y_i \in H\right)$, relația (1.6.7) se scrie sub forma:

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{n}\left(F_{y_i} - \frac{d}{dx}\left(F_{y_i'}\right) + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial y_i}\right)\delta y_i dx = 0. \qquad (1.6.8)$$

În virtutea relației (1.6.6) variațiile $\delta y_i, i=\overline{1,n}$, nu pot fi considerate arbitrare şi, prin urmare, nu poate fi aplicată lema lui Lagrange la relația (1.6.8). Întrucât are loc relația (1.6.4) se pot considera variațiile $\delta y_1,...,\delta y_k$ ca funcții de la variații arbitrare $\delta y_{k+1},...,\delta y_n$ şi este posibil de aflat funcțiile $\lambda_1,...,\lambda_k$ astfel încât să aibă loc egalitățile:

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx}\left(F_{y_i'}\right) + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial y_i} = 0,\ i=\overline{1,k}\quad \left(\forall x \in [a;b]\right). \qquad (1.6.9)$$

Într-adevăr, relațiile (1.6.9) reprezintă un sistem de k ecuații algebrice liniare în raport cu k necunoscute $\lambda_j(x)$, al cărui determinant este nenul (conform relației (1.6.4)), şi, prin urmare, are soluție unică $\lambda_j(x),\ j=\overline{1,k}$. Ținând cont de modul de alegere a funcțiilor λ_j, condițiile de extrem (1.6.8) iau forma

$$\int_a^b \sum_{i=k+1}^{n}\left\{F_{y_i} - \frac{d}{dx}\left(F_{y_i'}\right) + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial y_i}\right\}\delta y_i dx = 0,$$

în care deja variațiile $\delta y_i, i=\overline{k+1,n}$ sunt arbitrare. Pentru a aplica lema lui Lagrange se vor considera succesiv egale cu zero toate variațiile, cu excepția uneia, considerată arbitrară. Atunci, conform lemei lui Lagrange se deduce, că au loc egalitățile (1.6.9) şi pentru $i=\overline{k+1,n}$.

Dacă se introduce notația

$$F^*(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x)) := F(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x)) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(x)\varphi_j(x,\bar{y}(x))$$

condițiile de extrem se vor scrie astfel

$$F^*_{y_i} - \frac{d}{dx}\left(F^*_{y'_i}\right) = 0,\ i = \overline{1,n},$$

ceea ce înseamnă că vector-funcția $\bar{y}^*(x)$ reprezintă o extremală a funcționalei $I^*[y]$, definită prin relația (1.6.5). ■

Remarca 1.6.1. În baza teoremei 1.6.1 soluționarea problemei (1.6.1)-(1.6.3) de extrem condiționat al funcționalei $I[\bar{y}(x)]$ se reduce la cercetarea unei probleme de extrem necondiționat pentru funcționala $I^*[\bar{y}(x)]$.

Algoritm de aflare a extremalelor în problema (1.6.1)-(1.6.3):

α) se scrie funcția lui Lagrange:

$$F^*(x,\bar{y},\bar{y}') = F(x,\bar{y},\bar{y}') + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(x)\varphi_j(x,\bar{y}),$$

unde funcțiile $\lambda_j(x),\ j = \overline{1,k}$, sunt multiplicatorii lui Lagrange.

β) se consideră sistemul EEL pentru integrandul F^*

$$\frac{\partial F^*}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y'_i}\right) = 0,\ i = \overline{1,n},$$

precum și restricțiile de tip algebric $\varphi_j(x,\bar{y}(x)) = 0,\ j = \overline{1,k}$.

γ) se află soluția generală a sistemului EEL

$$y_i = y_i(x,c_1,...,c_{2n}),\ i = \overline{1,n},$$

precum și expresiile pentru multiplicatorii lui Lagrange $\lambda_j(x),\ j = \overline{1,k}$.

δ) se determină coeficienții $c_1,...,c_{2n}$ din condițiile la extremități:

$$\begin{cases} y_i(a,c_1,...,c_{2n}) = y_i^a,\ i = \overline{1,n}, \\ y_i(b,c_1,...,c_{2n}) = y_i^b,\ i = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Înlocuind în $y_i,\ i = \overline{1,n}$, valorile obținute ale constantelor $c_1,...,c_{2n}$ se obțin extremalele admisibile $\bar{y}^*(x) = \left(y_1^*(x),...,y_n^*(x)\right)^T$.

Exemplul 1.6.1. *Să se afle extremalele funcționalei* $I : D \to \mathbb{R}$*, unde*

$$I[y_1(x),y_2(x)] = \int_0^{\pi/2} \left(y_1^2(x) + y_2^2(x) - y_1'^2(x) - y_2'^2(x)\right)dx,$$

$$D := \{\bar{y}(x) = (y_1(x),y_2(x)) |\ y_i \in C^1[0;\pi/2],\ i = 1,2,\ y_1(0) = 1, y_2(0) = -1,$$
$$y_1(\pi/2) = y_2(\pi/2) = 1,\ y_1(x) - y_2(x) - 2\cos x = 0\}$$

Întrucât $y_1(0) - y_2(0) - 2\cos 0 = 0,\ y_1(\pi/2) - y_2(\pi/2) - 2\cos(\pi/2) = 0$ condițiile la extremități și restricția de tip algebric sunt compatibile. Funcția lui Lagrange este

$$F^*(x,\bar{y},\bar{y}')=F(x,\bar{y},\bar{y}')+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(x)\varphi_j(x,\bar{y})=y_1^2+y_2^2-y_1'^2-y_2'^2+\lambda_1(x)\left(y_1-y_2-2\cos x\right).$$

Se scrie sistemul de EEL şi restricţia de tip algebric:

$$\begin{cases} F^*_{y_1}-\dfrac{d}{dx}\left(F^*_{y_1'}\right)=0 \\ F^*_{y_2}-\dfrac{d}{dx}\left(F^*_{y_2'}\right)=0 \\ \varphi_1\left(x,y_1,y_2\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y_1+\lambda_1(x)-\left(-2y_1''\right)=0, \\ 2y_2-\lambda_1(x)-\left(-2y_2''\right)=0, \\ y_1-y_2-2\cos x=0. \end{cases}$$

Adunând primele două ecuaţii ale sistemului se obţine $y_1''+y_2''+y_1+y_2=0$. Efectuând substituţia $z=y_1+y_2$ ultima ecuaţie se scrie $z''+z=0$. Soluţia generală a acestei ecuaţii diferenţiale liniare omogene este $z(x)=c_1\cos x+c_2\sin x\ \left(c_1,c_2\in\mathbb{R}\right)$. Atunci $y_1(x)+y_2(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$ şi adunând această ecuaţie la ecuaţia definită de restricţia de tip algebric $y_1-y_2-2\cos x=0$, se obţine $y_1(x)=0.5c_1\cos x+0.5c_2\sin x+\cos x$. Pentru $y_2(x)$ avem $y_2(x)=y_1(x)-2\cos x$. Constantele c_1 şi c_2 se determină folosind condiţiile la extremităţi:

$$\begin{cases} y_1(0)=1 \\ y_1(\pi/2)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.5c_1+1=1 \\ 0.5c_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=0 \\ c_2=2 \end{cases}.$$

Componentele extremalei admisibile $\bar{y}^*(x)=\left(y_1^*(x),y_2^*(x)\right)$ sunt $y_1^*(x)=\sin x+\cos x$, $y_2^*(x)=y_1^*(x)-2\cos x=\sin x-\cos x$, iar multiplicatorul lui Lagrange $\lambda_1(x)=2y_2^*(x)+2y_2^{*\prime\prime}(x)=0$.

■

1.6.2. Problema cu restricţii de tip diferenţial

Să considerăm următoarea problemă de CV:

$$I\left[\bar{y}(x)\right]=\int_a^b F(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x))dx\to extr, \tag{1.6.10}$$

$$\bar{y}\in D:=\left\{\bar{y}\in C^1\left([a;b];\mathbb{R}^n\right)\middle|\ \bar{y}(a)=\bar{y}_a,\ \bar{y}(b)=\bar{y}_b\right\}, \tag{1.6.11}$$

$$\varphi_j(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x))=0,\ j=\overline{1,k}\ \ (k\le n),\ \ x\in[a;b], \tag{1.6.12}$$

unde $\bar{y}_a,\bar{y}_b\in\mathbb{R}^n$ sunt vectori definiţi, $\bar{y}(x)=(y_1(x),\ldots,y_n(x)),\ \bar{y}'(x)=\left(y_1'(x),\ldots,y_n'(x)\right)$, funcţia de $2n+1$ variabile $F(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x))$ este de clasă C^2, iar $\varphi_j(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x))\ (j=\overline{1,k})$ - de clasă C^1. În plus, se va considera că condiţiile la extremităţi sunt compatibile cu restricţiile suplimentare $\varphi_j(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x))\ (j=\overline{1,k})$, adică $\varphi_j\left(a,\bar{y}_a,\bar{y}'(a)\right)=\varphi_j\left(b,\bar{y}_b,\bar{y}'(b)\right)=0,\ j=\overline{1,k}$. Restricţiile suplimentare sunt numite restricţii de tip diferenţial (legături neolonome), iar problema de CV cu astfel de restricţii este numită *problema lui Lagrange* (prescurtat PL). Extremalele funcționalei $I[\bar{y}(x)]$ sunt vector-funcții $\bar{y}^*(x) = \left(y_1^*(x),\dots,y_n^*(x)\right)^T$.

Fie rangul matricei lui Jacobi în raport cu variabilele $\bar{y}'$ (după înlocuirea componentelor $y_i^*(x),\ i=\overline{1,n}$ în locul funcțiilor $y_i(x),\ i=\overline{1,n}$)

$$\frac{\partial(\varphi_1,\dots,\varphi_k)}{\partial(y_1',\dots,y_n')} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1'} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_n'} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi_k}{\partial y_1'} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_k}{\partial y_n'} \end{pmatrix}$$

este maximal (egal cu k, adică pentru această matrice există cel puțin un minor de ordinul k nenul), adică

$$\det\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial y_i'}\right)_{i,j=1}^{k} \neq 0. \tag{1.6.13}$$

În caz contrar, aceasta se poate obține printr-o modificare a ordinei variabilelor y_i şi a funcțiilor φ_j. Rezultatul ce conține condițiile necesare de ordinul I de extrem al funcționalei $I[\bar{y}(x)]$ în problema (1.6.10)-(1.6.12) este dat de:

***Teorema 1.6.2**. Fie mulțimea D definită prin relația (1.6.11), funcția $F(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x))$ de clasă C^2, iar $\varphi_j(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x))\ (j=\overline{1,k})$ de clasă C^1. Dacă vector-funcția $\bar{y}^*(x) = \left(y_1^*(x),\dots,y_n^*(x)\right)^T \in D$ ce satisface condițiile* (1.6.12) *realizează un extrem local al funcționalei $I[\bar{y}(x)]$, definită prin relația* (1.6.10)*, şi se verifică relația* (1.6.13)*, atunci există funcțiile $\lambda_j(x) \in C^1[a;b],\ j=\overline{1,k}$, astfel încât $\bar{y}^*(x)$ reprezintă o extremală a funcționalei*

$$I^*[\bar{y}(x)] := \int_a^b \left\{ F(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x)) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(x)\varphi_j\left(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x)\right) \right\} dx. \tag{1.6.14}$$

pe mulțimea funcțiilor admisibile D.

Demonstrație. Ca și în demonstrația teoremei 1.6.1 problema (1.6.10)-(1.6.12) se poate reduce la una de aflare a extremului condiționat al funcției de o variabilă reală α:

$$I(\alpha) := \int_a^b F\left(x, Y_1,\dots,Y_n, Y_1',\dots,Y_n'\right) dx \to extr,$$

$$g_j(\alpha) = 0,\ j=\overline{1,k},$$

unde $g_j(\alpha) := \varphi_j\left(x, Y_1,\dots,Y_n, Y_1',\dots,Y_n'\right)\ \left(j=\overline{1,k}\right)$, $Y_i := y_i^*(x) + \alpha\delta y_i(x),\ \delta y_i(x) \in H,\ i=\overline{1,n},\ \alpha \in \mathbb{R}$. Ținând cont că funcția $I(\alpha)$ admite un extrem pentru $\alpha = 0$, avem $I'(0) = 0$, iar atunci

$$I'(0)=\int_a^b \sum_{i=1}^n \{F_{y_i}\delta y_i + F_{y'_i}\delta y'_i\}dx = 0\ ,$$

$$g'_j(0)=\sum_{i=1}^n \left\{\frac{\partial\varphi_j}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial\varphi_j}{\partial y'_i}\delta y'_i\right\}=0,\ j=\overline{1,k}\ . \tag{1.6.15}$$

Înmulțind ecuația cu numărul $j\ \left(j=\overline{1,k}\right)$ a relației (1.6.15) la funcția arbitrară $\lambda_j \in C^1[a;b]$ şi integrând în limitele de la a la b se obține:

$$\int_a^b \lambda_j \sum_{i=1}^n \left\{\frac{\partial\varphi_j}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial\varphi_j}{\partial y'_i}\delta y'_i\right\}dx = 0,\ j=\overline{1,k}\ .$$

După însumarea ultimelor relații la integrala $I'(0)$ avem:

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n \{F^*_{y_i}\delta y_i + F^*_{y'_i}\delta y'_i\}dx = 0\ , \tag{1.6.16}$$

unde $F^* := F + \sum_{j=1}^k \lambda_j\varphi_j$. După integrarea prin părți $\int_a^b F^*_{y'_i}\delta y'_i dx = -\int_a^b \frac{d}{dx}\left(F^*_{y'_i}\right)\delta y_i dx \quad (\delta y_i \in H)$, relația (1.6.16) se scrie sub forma:

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n \left(F^*_{y_i} - \frac{d}{dx}\left(F^*_{y'_i}\right)\right)\delta y_i dx = 0\ . \tag{1.6.17}$$

În virtutea relației (1.6.15) variațiile $\delta y_i,\ i=\overline{1,n}$, nu pot fi considerate arbitrare şi, prin urmare, nu poate fi aplicată lema lui Lagrange la relația (1.6.17). Întrucât are loc relația (1.6.13) se pot considera variațiile $\delta y_1,\ldots,\delta y_k$ ca funcții de la variații arbitrare $\delta y_{k+1},\ldots,\delta y_n$ şi este posibil de determinat funcțiile $\lambda_j,\ j=\overline{1,k}$, astfel încât să aibă loc egalitățile:

$$F^*_{y_i} - \frac{d}{dx}\left(F^*_{y'_i}\right)=0,\ i=\overline{1,k}\quad \left(\forall x\in[a;b]\right). \tag{1.6.18}$$

Într-adevăr, relațiile (1.6.18) reprezintă un sistem de k ecuații diferențiale liniare în raport cu k necunoscute $\lambda_j(x)$

$$\sum_{j=1}^k \frac{\partial\varphi_j}{\partial y'_i}\lambda'_j = \sum_{j=1}^k \left\{\frac{\partial\varphi_j}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial y'_i}\right)\right\}\lambda_j - \left\{F_{y_i} - \frac{d}{dx}\left(F_{y'_i}\right)\right\}\quad \left(i=\overline{1,k}\right),$$

care, în virtutea relației (1.6.13), are soluție soluție unică $\lambda_j(x),\ j=\overline{1,k}$. Ținând cont de modul de alegere a funcțiilor λ_j, condițiile de extrem (1.6.17) iau forma

$$\int_a^b \sum_{i=k+1}^n \left\{F^*_{y_i} - \frac{d}{dx}\left(F^*_{y'_i}\right)\right\}\delta y_i dx = 0\ ,$$

în care deja variațiile $\delta y_i,\ i=\overline{k+1,n}$ sunt arbitrare. Pentru a aplica lema lui Lagrange se vor considera succesiv egale cu zero toate variațiile, cu excepția uneia, considerată arbitrară. Atunci, conform lemei lui Lagrange se deduce, că au loc egalitățile (1.6.18) şi pentru $i=\overline{k+1,n}$, ceea ce înseamnă că vector-funcția $\overline{y}^*(x)$ reprezintă o extremală a funcționalei $I^*[y]$, definită prin relația (1.6.14). ■

Remarca 1.6.2. Extremalele admisibile ale problemei (1.6.10)-(1.6.12) se conțin în mulțimea de extremale ale funcționalei auxiliare $I^*[y]$. Extremalele funcționalei $I^*[y]$ ce aparțin lui D şi satisfac relația (1.6.12) sunt extremale admisibile ale funcționalei $I[y]$ din problema (1.6.10)-(1.6.12). Condițiile ce permit determinarea extremalelor admisibile în problema (1.6.10)-(1.6.12) sunt:

$$F^*_{y_i^*}\left(x,\overline{y}^*(x),\overline{y}^{*\prime}(x)\right)-\frac{d}{dx}\left(F^*_{y_i^{*\prime}}\left(x,\overline{y}^*(x),\overline{y}^{*\prime}(x)\right)\right)=0,\ i=\overline{1,n}\ \ (x\in[a;b]),$$

$$\varphi_j(x,\overline{y}(x),\overline{y}'(x))=0,\ j=\overline{1,k}\ \ (k<n),\ \ (x\in[a;b]).$$

Pentru a determina $n+k$ funcții necunoscute $y_i^*(x)\ (i=\overline{1,n})$ şi $\lambda_j(x)\ (j=\overline{1,k})$ avem acelaşi număr de ecuații. Se selectează soluțiile sistemului ce aparțin mulțimii D. Condițiile la extremități (1.6.11) trebuie să fie compatibile cu restricțiile suplimentare (1.6.12).

Algoritm de aflare a extremalelor în problema (1.6.10)-(1.6.12):

α) se scrie funcția lui Lagrange:

$$F^*(x,\overline{y},\overline{y}')=F(x,\overline{y},\overline{y}')+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(x)\varphi_j(x,\overline{y},\overline{y}'),$$

unde funcțiile $\lambda_j(x),\ j=\overline{1,k}$, sunt multiplicatorii lui Lagrange.

β) se consideră sistemul EEL pentru integrandul F^*

$$\frac{\partial F^*}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y_i'}\right)=0,\ i=\overline{1,n},$$

precum şi restricțiile de tip diferențial $\varphi_j\left(x,\overline{y}(x),\overline{y}'(x)\right)=0,\ j=\overline{1,k}$.

γ) se află soluția generală a sistemului EEL

$$y_i=y_i(x,c_1,...,c_{2n}),\ i=\overline{1,n},$$

precum şi expresiile pentru multiplicatorii lui Lagrange $\lambda_j(x),\ j=\overline{1,k}$.

δ) se determină coeficienții $c_1,...,c_{2n}$ din condițiile la extremități:

$$\begin{cases} y_i(a,c_1,...,c_{2n})=y_i^a,\ i=\overline{1,n},\\ y_i(b,c_1,...,c_{2n})=y_i^b,\ i=\overline{1,n}.\end{cases}$$

Înlocuind în $y_i,\ i=\overline{1,n}$, valorile obținute ale constantelor $c_1,...,c_{2n}$ se obțin extremalele admisibile $\overline{y}^*(x)=\left(y_1^*(x),...,y_n^*(x)\right)^T$.

Exemplul 1.6.2. *Să se afle extremalele funcționalei* $I:D\to\mathbb{R}$*, unde*

$$I[y_1(x), y_2(x)] = \int_0^1 \left(y_1'^2(x) + y_2'^2(x)\right)dx,$$

$$D := \left\{\overline{y}(x) = (y_1(x), y_2(x)) \middle| \, y_i \in C^1[0;1],\ i = 1,2,\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 0, \right.$$
$$\left. y_1(1) = 2ch1,\ \ y_2(1) = 2sh1,\ \ y_1'(x) - y_2(x) = 0\right\}$$

Funcția lui Lagrange este

$$F^*(x, \overline{y}, \overline{y}') = F(x, \overline{y}, \overline{y}') + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(x)\varphi_j(x, \overline{y}, \overline{y}') = y_1'^2 + y_2'^2 + \lambda_1(x)(y_1' - y_2).$$

Se scrie sistemul de EEL şi restricția de tip diferențial:

$$\begin{cases} F^*_{y_1} - \dfrac{d}{dx}\left(F^*_{y_1'}\right) = 0 \\ F^*_{y_2} - \dfrac{d}{dx}\left(F^*_{y_2'}\right) = 0 \\ \varphi_1(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1'(x) + 2y_1'' = 0, \\ -\lambda_1(x) - 2y_2'' = 0, \\ y_1' - y_2 = 0. \end{cases}$$

Din ecuația a doua $-\lambda_1(x) - 2y_2'' = 0$ avem $\lambda_1' = -2y_2'''$, iar aceasta din urmă se substituie în prima ecuație $-y_2''' + y_1'' = 0$. Din restricția suplimentară $y_1' - y_2 = 0$ avem $y_1'' = y_2'$, iar după substituirea acesteia din urmă în ecuația $-y_2''' + y_1'' = 0$, se obține ecuația diferențială liniară omogenă $y_2''' - y_2' = 0$ cu coeficienți constanți. Soluția generală a acesteia este $y_2(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3$. În baza restricției suplimentare avem $y_1(x) = \int y_2(x)dx = c_1e^x - c_2e^{-x} + c_3x + c_4$. Constantele $c_j,\ j = \overline{1,4}$ se determină folosind condițiile la extremități:

$$\begin{cases} y_1(0) = 2 \\ y_2(0) = 0 \\ y_1(1) = 2ch1 \\ y_2(1) = 2sh1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 + c_4 = 2 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1e - c_2e^{-1} + c_3 + c_4 = e + e^{-1} \\ c_1e + c_2e^{-1} + c_3 = e - e^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \end{cases}.$$

Componentele extremalei admisibile $\overline{y}^*(x) = \left(y_1^*(x), y_2^*(x)\right)$ sunt $y_1^*(x) = e^x + e^{-x}$, $y_2^*(x) = e^x - e^{-x}$, iar multiplicatorul lui Lagrange $\lambda_1(x) = -2y_2^{*\prime\prime}(x) = -2\left(e^x - e^{-x}\right)$. Întrucât $y_1'(0) - y_2(0) = 1 - 1 - 0 = 0,\ y_1'(1) - y_2(1) = e - e^{-1} - 2sh1 = 0$ condițiile la extremități şi restricția de tip diferențial sunt compatibile. ■

1.6.3. Problema cu restricţii de tip integral

Să considerăm problema de CV:

$$I\left[\overline{y}(x)\right] = \int_a^b F(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x))dx \to extr\,, \tag{1.6.19}$$

$$\overline{y} \in D := \left\{\overline{y} \in C^1\left([a;b]; \mathbb{R}^n\right) \middle| \, \overline{y}(a) = \overline{y}_a,\ \overline{y}(b) = \overline{y}_b\right\}, \tag{1.6.20}$$

$$J_k\left[\overline{y}(x)\right] := \int_a^b \psi_k(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x))dx = L_k,\ k = \overline{1,m}\,, \tag{1.6.21}$$

unde $\overline{y}_a, \overline{y}_b \in \mathbb{R}^n$, $L_k \in \mathbb{R}\left(k=\overline{1,m}\right)$ sunt date, $\overline{y}(x)=\left(y_1(x),...,y_n(x)\right)$, $\overline{y}'(x)=\left(y_1'(x),...,y_n'(x)\right)$, funcția de $2n+1$ variabile $F(x,\overline{y}(x),\overline{y}'(x))$ este de clasă C^2, iar $\psi_k(x,\overline{y}(x),\overline{y}'(x))$ $(k=\overline{1,m})$ - de clasă C^1. Problema (1.6.19)-(1.6.21) cu restricții suplimentare de tip integral este numită problemă izoperimetrică, fiind considerată ca o generalizare a problemei clasice de aflare a figurii din plan de perimetru dat şi arie maximă. Extremalele funcționalei $I[\overline{y}(x)]$ sunt vector-funcții $\overline{y}^*(x)=\left(y_1^*(x),...,y_n^*(x)\right)^T$.

Remarca 1.6.3. În general vorbind, folosind condițiile (1.6.21) nu e posibil de exprimat o parte dintre funcțiile $y_1(x),...,y_n(x)$ prin celelalte, de aceea numărul m al restricțiilor de tip integral poate fi mai mic, egal sau mai mare decât numărul n al funcțiilor necunoscute.

Rezultatul ce conține condițiile necesare de ordinul I de extrem al funcționalei $I[\overline{y}(x)]$ în problema (1.6.19)-(1.6.21) este dat de:

Teorema 1.6.3. *Fie mulțimea D definită prin relația (1.6.20), funcția $F(x,\overline{y}(x),\overline{y}'(x))$ de clasă C^2, iar $\psi_k(x,\overline{y}(x),\overline{y}'(x))$ $(k=\overline{1,m})$ - de clasă C^1. Dacă vector-funcția $\overline{y}^*(x)=\left(y_1^*(x),...,y_n^*(x)\right)^T \in D$ ce satisface condițiile* (1.6.21) *realizează un extrem local al funcționalei $I[\overline{y}(x)]$, definită prin relația* (1.6.19)*, atunci există constantele reale λ_k, $k=\overline{1,m}$, astfel încât $\overline{y}^*(x)$ reprezintă o extremală a funcționalei*

$$I^*[\overline{y}(x)]:=\int_a^b\left\{F(x,\overline{y}(x),\overline{y}'(x))+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\psi_k\left(x,\overline{y}(x),\overline{y}'(x)\right)\right\}dx. \tag{1.6.22}$$

pe mulțimea funcțiilor admisibile D.

Demonstrație. Problema izoperimetrică (1.6.19)-(1.6.21) se poate reduce la o problemă Lagrange, introducând funcțiile

$$\mu_k(x)=\int_a^x\psi_k\left(z,\overline{y}(z),\overline{y}'(z)\right)dz,\ k=\overline{1,m}.$$

Derivând $\mu_k(x)$ în raport cu x se obține $\mu_k'(x)=\psi_k\left(x,\overline{y}(x),\overline{y}'(x)\right)$, $k=\overline{1,m}$. Atunci în locul restricțiilor de tip integral vom avea următoarele relații de tip diferențial:

$$\tilde{\varphi}_k:=\psi_k\left(x,\overline{y}(x),\overline{y}'(x)\right)-\mu_k'(x)=0,\ k=\overline{1,m}.$$

Restricțiile de tip integral implică următoarele condiții la extremități:

$$\mu_k(a)=0,\ \mu_k(b)=L_k,\ k=\overline{1,m}.$$

Astfel, problema izoperimetrică (1.6.19)-(1.6.21) şi problema Lagrange

$$
\begin{gathered}
I[\bar{y}(x)] = \int_a^b F(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))dx \to extr, \\
\bar{y} \in D := \left\{ \bar{y} \in C^1\left([a;b];\mathbb{R}^n\right) \middle| \, \bar{y}(a) = \bar{y}_a, \, \bar{y}(b) = \bar{y}_b \right\}, \\
\psi_k\left(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)\right) - \mu_k'(x) = 0, \; k = \overline{1,m}, \\
\mu_k(a) = 0, \; \mu_k(b) = L_k, \; k = \overline{1,m},
\end{gathered}
\tag{1.6.23}
$$

sunt echivalente. Se determină $m+n$ funcţii $y_i(x)\ (i=\overline{1,n}),\ \mu_k(x)\ (k=\overline{1,m})$ care realizează un extrem al funcţionalei $I[\bar{y}(x)]$ în condiţiile stipulate. De remarcat că în problema (1.6.23) rangul matricei lui Jacobi a restricţiilor de tip diferenţial în raport cu variabilele y_i' este maximal, deoarece avem

$$
\det \frac{\partial(\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_m)}{\partial(\mu', \dots, \mu_m')} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \,,
$$

unde $\tilde{\varphi}_k\left(x, \bar{y}, \bar{y}', \Lambda, \Lambda'\right) = \psi_k\left(x, \bar{y}, \bar{y}'\right) - \mu_k'(x), \; k = \overline{1,m}$.

Conform teoremei 1.6.2 aplicată la problema (1.6.23) şi a algoritmului de aflare a extremalelor în problema (1.6.10)-(1.6.12) vom considera sistemul de ecuaţii

$$
\tilde{F}_{y_i} - \frac{d}{dx}\left(\tilde{F}_{y_i'}\right) = 0, \, i = \overline{1,n} \,, \tag{1.6.24}
$$

$$
\tilde{F}_{\mu_k} - \frac{d}{dx}\left(\tilde{F}_{\mu_k'}\right) = 0, \, k = \overline{1,m} \,, \tag{1.6.25}
$$

unde $\tilde{F}$ este funcţia Lagrange

$$
\tilde{F}\left(x, \bar{y}, \bar{y}', \Lambda, \Lambda'\right) = F\left(x, \bar{y}, \bar{y}'\right) + \sum_{k=1}^m \lambda_k(x)\left(\psi_k\left(x, \bar{y}, \bar{y}'\right) - \mu_k'(x)\right), \quad \Lambda = \left(\mu_1(x), \dots, \mu_m(x)\right)
$$

asociată problemei (1.6.23). Întrucât avem $\tilde{F}_{\mu_k} = 0, \; \tilde{F}_{\mu_k'} = -\lambda_k(x)$, din ecuaţiile (1.6.25) rezultă că $\frac{d}{dx}\left(\lambda_k(x)\right) = 0, \; k = \overline{1,m}$, sau $\lambda_k(x) = \lambda_k = const, \; k = \overline{1,m}$. Astfel în problema izoperimetrică multiplicatorii lui Lagrange sunt constante reale, iar ecuaţiile (1.6.24) pot fi scrise sub forma

$$
F^*_{y_i} - \frac{d}{dx}\left(F^*_{y_i'}\right) = 0, \, i = \overline{1,n} \,, \tag{1.6.26}
$$

unde $F^* = F + \sum_{k=1}^m \lambda_k \psi_k$. Relaţia (1.6.26) reprezintă sistemul EEL pentru funcţionala (1.6.22), iar funcţiile $y_i = y_i^*(x), \; i = \overline{1,n}$ ce realizează extremul funcţionalei $I[\bar{y}]$ din problema (1.6.19)-(1.6.21) sunt în acelaşi timp extremale ale funcţionalei (1.6.22). ■

Algoritm de aflare a extremalelor în problema (1.6.10)-(1.6.12):

α) se scrie funcţia lui Lagrange:

$$F^*(x,\overline{y},\overline{y}') = F(x,\overline{y},\overline{y}') + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \varphi_j(x,\overline{y},\overline{y}'),$$

în care multiplicatorii Lagrange λ_j, $j=\overline{1,k}$, sunt constante reale necunoscute.

β) se consideră sistemul EEL pentru integrandul F^*

$$\frac{\partial F^*}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y_i'}\right) = 0,\ i=\overline{1,n},$$

precum şi restricţiile de tip integral $\int_a^b F_j\left(x,\overline{y}(x),\overline{y}'(x)\right)dx = L_j,\ j=\overline{1,k}$.

γ) se află soluţia generală a sistemului EEL

$$y_i = y_i(x,c_1,...,c_{2n}),\ i=\overline{1,n},$$

precum şi expresiile pentru multiplicatorii lui Lagrange λ_j, $j=\overline{1,k}$.

δ) se determină coeficienţii $c_1,...,c_{2n}$ din condiţiile la extremităţi:

$$\begin{cases} y_i(a,c_1,...,c_{2n}) = y_i^a,\ i=\overline{1,n}, \\ y_i(b,c_1,...,c_{2n}) = y_i^b,\ i=\overline{1,n}. \end{cases}$$

Înlocuind în y_i, $i=\overline{1,n}$, valorile obţinute ale constantelor $c_1,...,c_{2n}$ se obţin extremalele admisibile $\overline{y}^*(x) = \left(y_1^*(x),...,y_n^*(x)\right)^T$.

Exemplul 1.6.3. *Să se afle extremalele funcţionalei* $I : D \to \mathbb{R}$, *unde*

$$I[y_1(x),y_2(x)] = \int_0^1 \left(y_1'(x)y_2'(x)\right)dx,$$

$$D := \Big\{\overline{y}(x) = (y_1(x),y_2(x)) \Big| \ y_i \in C^1[0;1],\ i=1,2,\ y_1(0)=y_2(0)=y_1(1)=0,$$

$$y_2(1)=1,\ \int_0^1 y_1(x)dx = 1,\ \int_0^1 y_2(x)dx = 0\Big\}$$

Funcţia lui Lagrange este

$$F^*(x,\overline{y},\overline{y}') = F(x,\overline{y},\overline{y}') + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \psi_j(x,\overline{y},\overline{y}') = y_1'y_2' + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2.$$

Se scrie sistemul de EEL şi restricţiile de tip integral:

$$\begin{cases} F_{y_1}^* - \dfrac{d}{dx}\left(F_{y_1'}^*\right) = 0 \\ F_{y_2}^* - \dfrac{d}{dx}\left(F_{y_2'}^*\right) = 0 \\ \int_a^b F_j\left(x,\overline{y}(x),\overline{y}'(x)\right)dx = L_j,\ j=\overline{1,2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - y_2'' = 0, \\ \lambda_2 - y_1'' = 0, \\ \int_0^1 y_1(x)dx = 1,\ \int_0^1 y_2(x)dx = 0. \end{cases}$$

Soluţiile generale ale primelor două ecuaţii ale sistemului sunt:

$$y_2(x) = 0.5\lambda_1 x^2 + c_1 x + c_2,\quad y_1(x) = 0.5\lambda_2 x^2 + c_3 x + c_4.$$

După substituirea acestora în restricţiile suplimentare şi integrarea analitică conform formulei Leibniz-Newton se obţin ecuaţiile:

$$\frac{\lambda_2}{6}+\frac{c_3}{2}+c_4=1,\quad \frac{\lambda_1}{6}+\frac{c_1}{2}+c_2=0\ .$$

Necunoscutele $\lambda_i, c_j,\ i=1,2,\ j=\overline{1,4}$ se determină din sistemul de ecuații obținut prin alăturarea la ultimele două ecuații a încă patru, obținute din condițiile la extremități. Se obține $c_1=-2,\ c_2=c_4=0,\ c_3=6,\ \lambda_1=6,\ \lambda_2=-12$. Componentele extremalei admisibile $\overline{y}^*(x)=\left(y_1^*(x), y_2^*(x)\right)$ sunt $y_1^*(x)=-6x^2+6x$, $y_2^*(x)=3x^2-2x$. ■